AUTOR: **ANDRZEJ SOKOŁOWSKI**

KSZTAŁTOWANIE ANALITYCZNYCH I WIZUALNYCH UMIEJĘTNOŚCI UCZNIA

NA PRZYKŁADZIE ZASTOSOWANIA GRANIC DO RYSOWANIA FUNKCJI

Badania z dydaktyki matematyki wykazują, że rozumienie pojęć matematycznych często jest uwarunkowane połączeniem wizualnych i analitycznych umiejętności ucznia[1]. Artykuł poniższy jest przykładem, jak kształtować te umiejętności poprzez interpretację granic w kontekście rysowania funkcji wielomianowych pierwszego i drugiego stopnia.

Zrozumienie pojęcia funkcji jest jednym z najważniejszych elementów nauczania matematyki[2, 3], a techniki szkicowania funkcji są priorytetową umiejętnością, którą uczeń musi zdobyć, by dobrze sobie radzić z rachunkiem różniczkowym i całkowym. Dobór metod uczenia rysowania funkcji, które będą dla uczniów przekonujące i zrozumiałe, jest więc ważny nie tylko, aby zdali maturę, ale również by dobrze sobie radzili na studiach.

KORZYŚCI METODYCZNE Z ZASTOSOWANIA GRANIC DO RYSOWANIA FUNKCJI

Metody rysowania funkcji są różne. Wykres funkcji może być narysowany między innymi poprzez: (a) znajdowanie współrzędnych; (b) stosowanie transformacji funkcji; (c) korzystanie ze specyficznych cech funkcji; (d) zidentyfikowanie funkcji pierwotnej i znalezienie odwrotności lub (e) korzystanie ze znalezienia przecięć funkcji z osiami współrzędnych i policzenia granic funkcji. Każda z metod jest ważna i uczeń powinien wyrobić sobie umiejętność zastosowania właściwej metody dla danego przykładu.

W artykule tym zastosujemy najbardziej ogólną metodę (e), która włączy również specyficzne cechy danej grupy funkcji (np. współczynnik kierunkowy dla funkcji liniowych lub lokację wierzchołka w przypadku funkcji kwadratowych). Wbrew pozorom, metoda ta jest dobrze przyswajalna przez uczniów. Uczniowie zauważą, że metoda ta da im nie tylko możliwość poznania i kształtowania bardziej abstrakcyjnego matematycznego myślenia, ale również podstawy do rysowania kompleksowych funkcji, np. wymiernych, wykładniczych czy logarytmicznych. Znajomość granic wykorzystamy do określania położenia funkcji na krańcach przedziału osi x, a znajomość przecięć do bardziej „lokalnego” znalezienia położenia funkcji. Znalezienie granic służyć będzie również na tej lekcji do weryfikacji przewidywanego położenia funkcji we współrzędnych XY, biorąc pod uwagę ogóle cechy funkcji.

KONTENT LEKCJI

By uczeń czuł się komfortowo podczas tej lekcji i efektownie przyswoił sobie prezentowaną technikę, wymagane jest, by był biegły w znalezieniu granic funkcji dla $x \to \pm\infty$, a także poprawnie interpretował i znał techniki znalezienia przecięć funkcji z osiami XY. Lekcja jest zorganizowana dedukcyjnie – najpierw powtarzamy techniki liczenia przecięć funkcji z osiami XY i liczenia granic, a później łączymy te elementy w jeden spójny proces budowania wykresu.

PRZYPOMNIENIE TECHNIKI ZNAJDOWANIA MIEJSC, W KTÓRYCH FUNKCJA PRZECINA OSIE *X* I *Y*.

Powtórzenie to przeprowadzimy na przykładach.

Przykład 1

Dana jest funkcja $f(x) = -3x + 5$. Policz współrzędne przecięcia tej funkcji z osią X i Y.

Przecięcie funkcji z osią X to miejsca zerowe, dla której $f(x) = 0$. Podstawiając $0 = -3x + 9$ i rozwiązując na x, otrzymujemy $x = 3$. Korzystając z formalnego zapisu, punktem przecięcia jest $A(3, 0)$. Postępując podobnie, ale podstawiając $x = 0$ i znajdując wartość tej funkcji w tym punkcje, otrzymujemy $f(0) = -3(0) + 5 = 5$ lub $B(0, 5)$, co określa punkt przecięcia tej funkcji z osią Y. Przypomnijmy teraz, jak znaleźć przecięcia osi X and Y dla funkcji kwadratowych.

Przykład 2

Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 - 4$. Policz miejsce zerowe tej funkcji i współrzędną funkcji f, gdzie przecina oś Y.

Postępując podobnie jak w przykładzie 1, ale stosując metody rozwiązania równań kwadratowych, otrzymujemy $x = \pm\sqrt{-4}$, co jest równoważne z $x = \pm 2i$. Liczby zespolone nie mogą być oznaczone w rzeczywistym układzie XY, co w kontekście położenia funkcji znaczy, że ta funkcja nie przecina osi X w żadnym z jej miejsc. Jednakże jej przecięcie z osią Y jest równe $f(x) = -4$. Zwracamy uwagę uczniów, że techniki liczenia miejsc zerowych dla obydwóch rodzajów funkcji są podobne, różnice są zauważalne w sposobie rozwiazywania równań i ewaluowania funkcji. Zwrócenie uwagi uczniów na podobieństwa metod pomoże im głębiej zrozumieć ich istotę i je zapamiętać.

RYSOWANIE FUNKCJI

Policzenie przecięć funkcji z osiami XY może być wystarczające, by narysować funkcje liniowe, ale może nie być wystarczające do rysowania innych rodzajów funkcji. Cel policzenia granic do rysowania funkcji liniowych jest tu jednak bardziej nadrzędny; funkcje liniowe są prostymi funkcjami, które są tu wykorzystane do kształtowania intuicyjnego rozumienia granic funkcji w nieskończoności, które były wcześniej dyskutowane na łamach „Matematyki”[3]. W przypadku funkcji kwadratowych możemy również policzyć położenie wierzchołka paraboli tak, by dokładniej ją zlokalizować, co zastosujemy w dalszej części lekcji. Jak dalej kontynuować tę lekcję? Nauczyciel może: (a) najpierw skupić uwagę na rysowaniu funkcji liniowych z wykorzystaniem granic i przecięć, a na następnej lekcji praktykować rysowanie funkcji kwadratowych albo (b) zapoznać uczniów z rysowaniem obu typów funkcji na tej samej lekcji. Decyzja zależy od stopnia rozumienia granic przez uczniów i ich biegłości w rozwiązywania równań. W poniższej lekcji zastosowano wariant (b); uczniowie będą znajdować granice i przecięcia funkcji kwadratowych i liniowych. Na tablicy zapisujemy:

Podanych jest kilka funkcji wielomianowych zerowego, pierwszego i drugiego stopnia. Dla każdej z nich:

a) Określ i naszkicuj jej położenie dla $x \to \infty$ i dla $x \to -\infty$ poprzez znalezienie granic tej funkcji.
b) Policz punkty przecięcia tej funkcji z osią X, jeśli jest to możliwe.
c) Policz punkt przecięcia z osią Y.
d) Narysuj wykres tej funkcji, wykorzystując policzone granice i przecięcia.

Przykład 1. f(x) = −x − 3

a) Stosując znane techniki liczenia granic, otrzymujemy

$$\lim_{x\to\infty}(-x-3) = \lim_{x\to\infty}(-x) = -\infty$$
i $$\lim_{x\to-\infty}(-x-3) = \lim_{x\to-\infty}(-x) = \infty.$$

Aby zobrazować intuicyjnie znaczenie tych wyników, możemy zapisać je jako swego rodzaju położenie wybranych położeń funkcji i oznaczyć je nieformalnie jako $A(\infty, -\infty)$ i $B(-\infty, \infty)$, a następnie graficznie zobrazować jako krótkie odcinki funkcji (zobacz ryc. 1).

Zwracamy uwagę, że na podstawie tego szkicu funkcja ta wygląda na malejącą, co koreluje z ujemną wartością jej współczynnika kierunkowego. Podkreślamy, że znajomość położenia funkcji na krańcach osi liczbowej daje nam ogólny wgląd na położenie i zachowanie funkcji, ale nie daje nam możliwości lokalnego i bardziej precyzyjnego jej określenia. Przechodzimy więc do liczenia przecięć funkcji z osiami X i Y.

b) Funkcja przecina oś x, jeśli $f(x) = 0$, tak więc jeśli $-x - 3 = 0$, co prowadzi do znalezienia $C(-3, 0)$.
c) $f(0) = -3$, co w zapisie współrzędnych jest $D(0, -3)$.
d) Nanosimy policzone punkty na współrzędne XY, otrzymując kompletny wykres funkcji przedstawiony na ryc. 2.

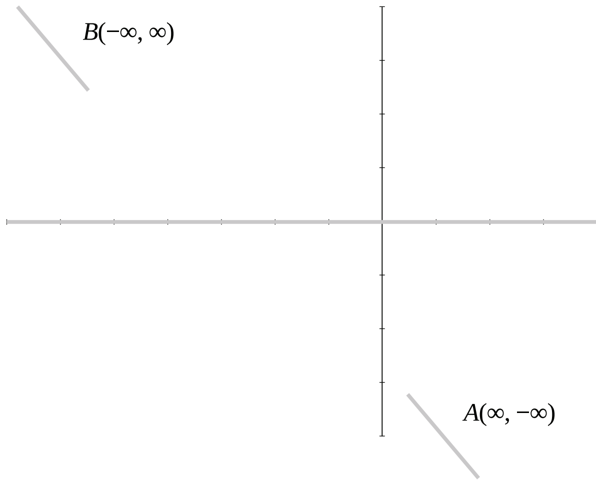
Zauważamy, że wszystkie elementy pomogły stworzyć jeden koherentny obraz. Jeśli jeden z tych elementów „nie pasowałby”, np. przecięcie z osią x lub y, należałoby zweryfikować jego wartości i proces liczenia. Jest oczywiste, że do narysowania funkcji liniowej wystarczą dwa punkty. Niemniej policzenie granic i skontrastowanie ich zgodności z przebiegiem wyznaczonym przez współczynnik kierunkowy funkcji upewni uczniów, że wszystkie analityczne wyliczenia korelują z wykresem, co jednocześnie daje im poczucie kształtowania umiejętności łączenia tych technik i pozwala osiągnąć cel lekcji.

Przykład 2. $g(x) = -2$

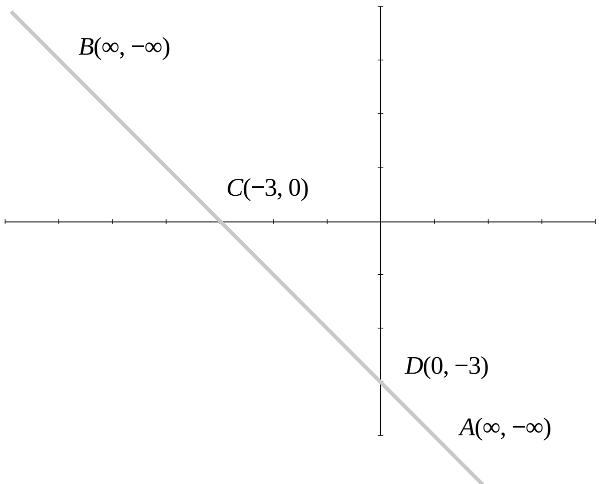
Jakkolwiek większość uczniów narysuje poziomą linię przecinającą oś Y w punkcie $y = -2$ bez konieczności znajdowania granic, to część uczniów może mieć wątpliwości, czy wykres będzie pionowy, czy poziomy. Policzenie granic i zinterpretowanie ich w kontekście wykresu położenia tej funkcji wyeliminuje tę wątpliwość.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(-2) = -2$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2) = -2$. Zaznaczmy ten wynik w układzie XY jako krótkie segmenty o „współrzędnych” $A(\infty, -2)$ i $B(-\infty, -2)$ w podobny sposób jak w przykładzie 1.
b) Próba policzenia przecięcia tej funkcji z osią X prowadzi do $0 = -2$, co jest sprzecznością, którą interpretujemy jako brak takowych przecięć.
c) $g(0) = -2$. Przecięcie tej funkcji z osią Y w punkcie $y = -2$ potwierdza fakt, że funkcja ta jest funkcją stałą o współczynniku kierunkowym równym zero, której wykres przedstawia ryc. 3.

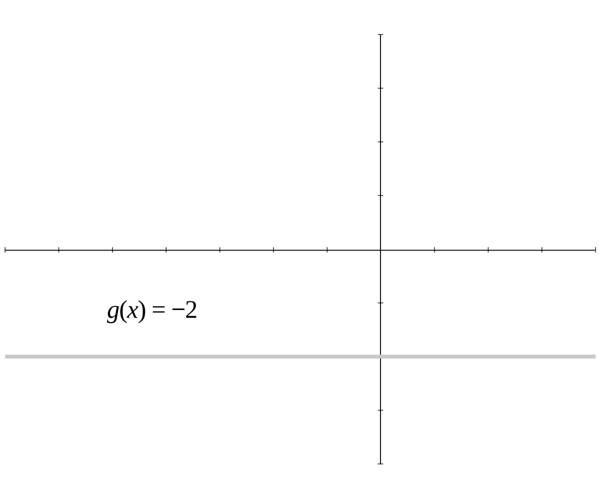
Rozwiązujemy więcej przykładów z różnymi wartościami współczynnika kierunkowego i przecięć. Zwracamy przy tym ciągłą uwagę na wizualną interpretację analitycznych wyników jako integralnego elementu dydaktycznego procesu; ponieważ celem tej lekcji jest wpojenie uczniowi przeświadczenia, że liczenie granic funkcji wzbogaca jego wiedzę o funkcjach. Po upewnieniu się, że uczniowie dobrze sobie radzą z funkcjami liniowymi, przechodzimy do rysowania funkcji kwadratowych.



▲ **Ryc. 1.** Szkic funkcji $f(x) = -x - 3$ z wykorzystaniem granic



▲ **Ryc. 2.** Kompletny wykres funkcji $f(x) = -x - 3$



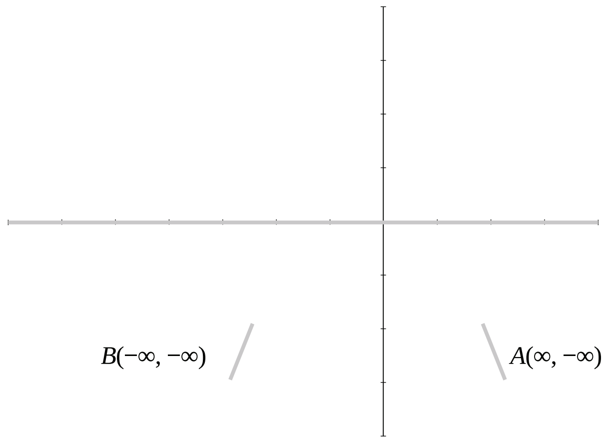
▲ **Ryc. 3.** Wykres funkcji $g(x) = -2$

Przykład 3. $f(x) = -x^2 - 2x$

Korzystając z technik liczenia granic, otrzymujemy:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^2-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$
i $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$.

W podobny sposób jak poprzednio (jeśli to pomaga uczniom) przedstawiamy obrazowo wyniki tych rachunków, zapisując je jako $A(\infty, -\infty)$ i $B(-\infty, -\infty)$. Pytamy uczniów o lokalizację tych „punktów" w układzie XY i o przewidywany przebieg wykresu tej funkcji (kierunek otwarcia paraboli). Uczniowie zauważą, że ramiona tego wykresu są skierowane w dół, co sugeruje ryc. 4.



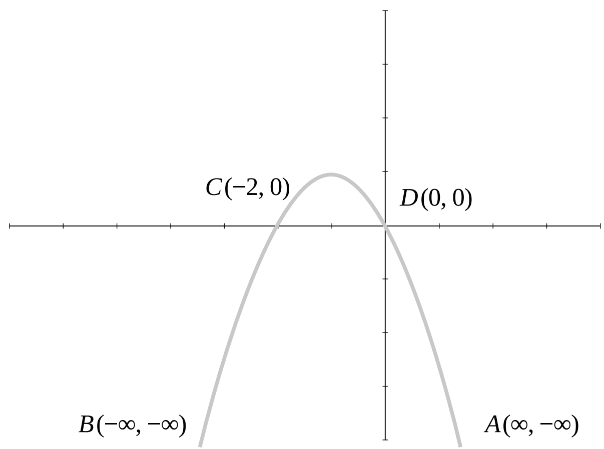
▲ **Ryc. 4.** Szkic funkcji $f(x) = -x^2 - 2x$ z wykorzystaniem granic

Komentujemy, że funkcja ta jest ciągła, dlatego musi ona osiągnąć maksymalną wartość w pewnym punkcie, by można ją było fizycznie narysować. Te przypuszczenia potwierdzają również znak współczynnika a tej paraboli, który jest ujemny. Przechodzimy teraz do liczenia przecięć tej funkcji.

b) $0 = -x^2 - 2x$, co prowadzi do $0 = x(x + 2)$ i punktów $C(0, 0)$ i $D(-2, 0)$.

c) $f(0) = 0$, co upewnia nas, że funkcja przecina oś Y w punkcie $A(0, 0)$.

Nanosząc te wyliczenia na współrzędne XY, otrzymujemy gotowy wykres funkcji przedstawiony na ryc. 5.



▲ **Ryc. 5.** Kompletny wykres funkcji $f(x) = -x^2 - 2x$

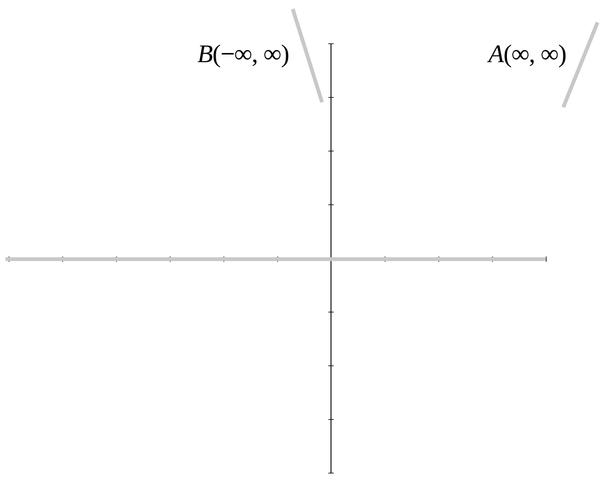
Zwracamy znowu uwagę uczniów na współgranie wszystkich policzonych elementów funkcji.

Przykład 4. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Zaczynamy, jak poprzednio, od liczenia granic.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-4x+4\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\right)=\infty$
i $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-4x+4\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=\infty$.

Zapisujemy te wyniki jako $A(\infty, \infty)$ i $B(-\infty, \infty)$. Uczniowie zauważają, że ramiona paraboli są skierowane w górę (zobacz ryc. 6), co również jest potwierdzone wartością współczynnika a tej funkcji.

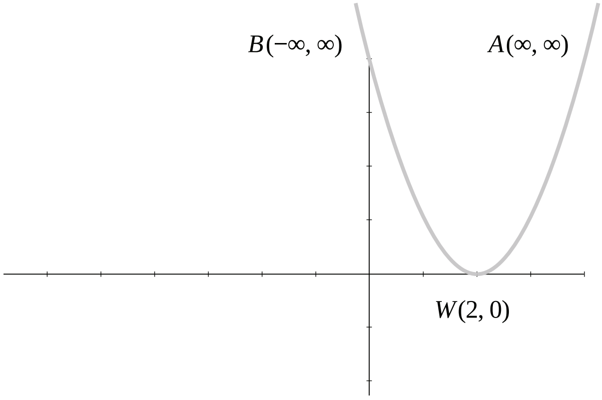


▲ **Ryc. 6.** Szkic funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 4$ z wykorzystaniem granic

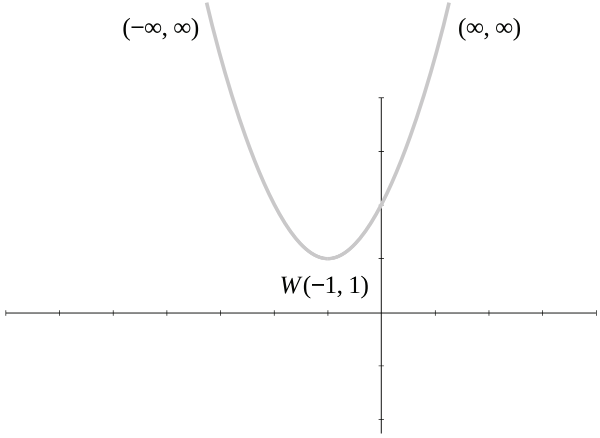
b) $0 = x^2 - 4x + 4$. Przedstawiając to równanie w postaci iloczynu, otrzymujemy $0 = (x - 2)^2$, co w oznacza dwa identyczne rozwiązania $x = 2$ lub $x = 2$. Jaki to ma wpływ na wykres tej funkcji? Wykres dotyka oś X, ale jej nie przecina i mówimy, że funkcja ta posiada podwójne zero w punkcie $x = 2$, co reprezentuje jednocześnie współrzędną x wierzchołka tej paraboli $W(2, 0)$. Przechodzimy do liczenia przecięcia z osią Y.

c) $f(0) = 4$, co określa rzędną wierzchołka tej paraboli. Sumując wyliczenia z b i c, otrzymujemy, że współrzędne wierzchołka tej paraboli to $W(0, 4)$, i wykres pokazany na ryc. 7.

Jakkolwiek w powyższym przykładzie liczenie położenia wierzchołka nie było wyeksponowane, uczniowie są zaintrygowani, że podwójne zero funkcji kwadratowej implikuje pozycję jej wierzchołka.



▲ **Ryc. 7.** Kompletny wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 4$



▲ **Ryc. 8.** Kompletny wykres funkcji

Przykład 5. $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+2x+2\right)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+2x+2\right)=\infty$, co interpretujemy jako oba ramiona paraboli skierowane do góry (ryc. 8).

b) $0 = x^2 + 2x + 2$. By to równanie rozwiązać, pytamy, czy wzory Viete'a mogą być zastosowane. Krótka analiza nie potwierdza tych przypuszczeń, więc stosujemy ogólną formułę i otrzymujemy:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(2)}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm 1i\,.$$

Rozwiązanie to reprezentuje liczby zespolone, co jest interpretowane tak, że dana funkcja nie przecina osi X w żadnym z jej miejsc. Powtórnie zwracamy uczniom uwagę, że liczby zespolone nie mogą być naniesione na rzeczywisty układ współrzędnych.

c) Liczymy współrzędne wierzchołka tej paraboli, korzystając z $x_W=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$ i $y_W=f(-1)=(-1)^2+2(-1)+2=1$; wierzchołek tej paraboli jest w punkcie $W(-1, 1)$.

Sumujemy wszystkie informacje i budujemy wykres tej funkcji, który jest pokazany na ryc. 8.

W powyższym przykładzie celowo pominęliśmy zapis wyniku granic jako współrzędne, ponieważ zapis ten jest nieformalny i raczej chcielibyśmy, by uczeń go unikał, szczególnie na lekcjach rachunku różniczkowego.

PODSUMOWANIE

Przedstawiona metoda jest na tyle ogólna, że praktycznie wszystkie funkcje można naszkicować, znając ją, zakładając, że znane są uczniowi techniki liczenia granic nie tylko w nieskończoności, ale też granic jednostronnych i proces rozwiązywania równań. Jej zaletą jest włączenie kilku czynności (i ich wyników), które razem muszą współgrać, by wykres był poprawny. Znając interpretację granic, uczeń może również użyć tej umiejętności podczas odpowiadania na pytania o zidentyfikowanie poprawnego wykresu do podanej funkcji. Jest jedna dygresja: Czy potrzebne jest liczenie delty (przed policzeniem pierwiastków tego równania), by przekonać ucznia, że funkcja ta nie przecina osi x? Wydaje się, że nie jest to konieczne. Licząc deltę, uczeń musi pamiętać jej różne interpretacje w kontekście rysowania paraboli albo wiedzieć, dlaczego rzeczywiste pierwiastki nie istnieją, kiedy wartość delty jest ujemna. Zastosowanie procesu liczenia miejsc zerowych bezpośrednio i właściwa interpretacja wyników ukierunkują ucznia na uzyskanie poprawnej odpowiedzi w jednym procesie, który jest również stosowany przy rysowaniu innych funkcji.

Gorąco zachęcam czytelników do wypróbowania tej metody i podzielenia się spostrzeżeniami. Przy następnym spotkaniu zaproponujemy uczniom interaktywne ćwiczenie z analizy funkcji z wykorzystaniem kart pracy ucznia.

Bibliografia:

1. Haciomeroglu E.S., Aspinwall L., Presmeg N.C., *Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs*, „Mathematical Thinking and Learning" 12(2)/2010, s. 152–176.
2. Leinhardt G., Zaslavsky O., Stein M.K., *Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching*, „Review of educational research" 60(1)/1990, s. 1–64.
3. Sokołowski A., *The Effects of Using Representations in Elementary Mathematics: Meta-Analysis of Research*, „Journal of Education" 6(3)/2018, s. 129–152.
4. Sokołowski A., *Modelowanie pojęcia granicy funkcji w nieskończoności na przykładzie funkcji liniowych*, „Matematyka" 6(28)/2018, s. 26–31.
5. Generowanie rysunków: https://phet.colorado.edu/sims/equation-grapher/equation-grapher_en.html (dostęp: styczeń 2018).

dr Andrzej Sokołowski

Wykladowca fizyki i matematyki na Lone Star College, Houston, TX, USA.