

Matematyka

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI

wrzesień/październik 5/2018 (26) | NR ART. 440826 | 55 zł (w tym 5% VAT) | 435/indeks 365149 | ISSN 0137-8848

Zadania tekstowe Jak rozwijać predyspozycje matematyczne u uczniów

PARTNER WYDANIA



MATEMATYKA Z JAPONII

Pomysły na stworzenie
ciekawych zajęć

LICZBY ZESPOLONE

Scenariusze
ćwiczeń

KÓŁKO MATEMATYCZNE

Autorski program
nauczania trygonometrii

Art. nr. 440826

ISSN 0137-8848



Nowość!

AUTORSKIE SCENARIUSZE ZAJĘĆ MATEMATYCZNYCH, KTÓRE POMOGĄ
WYRÓWNAĆ POZIOM WIEDZY WŚRÓD UCZNIÓW!



W publikacji
znajdziesz **13**
scenariuszy zajęć,
wśród nich m.in.:

- pojęcia matematyczne w GeoGebry – geometria analityczna
- optymalizacje i przewidywanie poprawnego wyniku
- rozwiązania matur przy pomocy GeoGebry
- wprowadzanie nowych pojęć matematycznych na zajęciach
- trygonometria – wprowadzanie funkcji trygonometrycznej
 - równania i nierówności z wartością bezwzględną
- wzajemne położenie okręgów
 - funkcja liniowa
 - długość odcinka

Dlaczego warto?



Dowiesz się, jak wykorzystać możliwości GeoGebry w nauczaniu matematyki.



Dzięki wykorzystaniu GeoGebry na zajęciach efektywniej wykorzystasz czas na lekcjach i dowiesz się, jak przekazać więcej informacji swoim uczniom.



Otrzymasz wskazówki, jak zainteresować uczniów matematyką, dzięki czemu podniesiesz ich aktywność na zajęciach.

Więcej na: www.literka.pl

Matematyka

WYDAWCA

Forum Media Polska Sp. z o.o.
ul. Polska 13, 60-595 Poznań
Sąd Rejonowy Nowe Miasto
i Wilda w Poznaniu
VIII Wydział Gospodarczy KRS
KRS nr 0000037307
NIP 781-15-51-223
Kapitał zakładowy:
300 000 zł

PREZES ZARZĄDU

Magdalena Balanicka

DYREKTOR WYDAWNICZY

Radosław Lewandowski

REDAKTOR NACZELNY

Patryk Cichoracki
matematyka@forum-media.pl

REDAKTOR PROWADZĄCY

Mirosław Majewski
mirek.majewski@yahoo.com

NADZÓR GRAFICZNY

Agnieszka Szulc

KOORDYNATOR WYDAWNICZY

Aneta Lupa-Marcinowska

DZIAŁ OBSŁUGI KLIENTA/

/PRENUMERATA
tel. 61 66 55 800
faks: 61 66 55 888
e-mail: bok@forum-media.pl

MARKETING I PROMOCJA

Maria Oseseć
maria.oseseć@forum-media.pl

REKLAMA

Anna Mikłaszewicz
anna.miklaszewicz@forum-media.pl

PROJEKT GRAFICZNY

Graphics & Design Studio
Marcin Ziółkowski

SKŁAD I ŁAMANIE

Yezioro

KOREKTA

Barbara Kostrzeńska

DRUK I OPRAWA

Drukarnia Paper & Tinta

SERWIS ZDJĘCIOWY

Dreamstime, Fotolia

NAKLAD

3000 egz.

www.forum-media.pl



Bieżące informacje o czasopiśmie
dostępne na stronie:
www.czasopismomatematyka.pl

Drodzy Czytelnicy,

W naszym, jakże zmiennym, świecie zalewa nas fala licznych czasopism i książek. Czasopisma, jedne szare drukowane na kiepskim papierze, inne kolorowe z błyszczącymi kartkami, trwają długie lata z nami lub znikają jak efemerydy. Patrząc właśnie na rozkładówkę najnowszego numeru „Matematyki dla Nauczycieli” i porównując ją z pierwszym numerem tego czasopisma wydanego we wrześniu 1948 roku. Tak, dokładnie siedemdziesiąt lat minęło od pierwszej „Matematyki”. Mało kto wie, że jest to najdłużej wydawane czasopismo matematyczne w Polsce. Już 70 lat. Na szarych kartkach tego pierwszego numeru mamy teksty takich sław polskich, jak: Stanisław Gołąb, Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Stanisław Kartasiński, Bolesław Iwaszkiewicz i paru innych. W Komitecie redakcyjnym tego numeru i wielu dalszych znajdziemy również sławy polskiej matematyki z tego okresu. Pierwszym redaktorem czasopisma był Bolesław Iwaszkiewicz – autor wspaniałych podręczników geometrii elementarnej. To właśnie na tych podręcznikach wiele pokoleń Polaków poznawało tajniki geometrii, w tym również niżej podpisany. Podręczniki Iwaszkiewicza, szare, ale za to bardzo przejrzyste, w późniejszych latach zostały zastąpione bardziej „wystrzałowymi”, kolorowymi i nie zawsze trafionymi dziełami. Tymczasem „Matematyka dla Nauczycieli” trwała ze zmiennym szczęściem aż do naszych czasów.

Popatrzymy jeszcze raz na pierwszy numer naszego czasopisma i zobaczymy, o czym pisali wtedy jego autorzy. W rubryce redakcyjnej znajdziemy bardzo istotną deklarację „Czasopismo, którego pierwszy numer oddajemy w ręce Czytelników, zamierza między innymi służyć popularyzacji matematyki”. Przez kolejne siedemdziesiąt lat ten cel się nie zmienił. „Matematyka dla Nauczycieli” zajmowała się również wieloma innymi sprawami. Już na pierwszej stronie pierwszego numeru znajdujemy tekst poświęcony dyskusji liczby lat trwania nauki w szkole, wtedy podstawowej i średniej. Już wtedy rozważano systemy 8+4 oraz 7+4. Dział dydaktyczny czasopisma był zawsze, nie tylko w pierwszym numerze, bardzo obszerny. Mamy tu również coś, co umknęło uwadze późniejszych ekip redakcyjnych, w tym również obecnej. Są to dwa bogate działy **Kronika** oraz **Bibliografia**. A w kronice pierwszego numeru informacja o jubileuszu Profesora Wacława Sierpińskiego oraz informacja o VI Zjeździe Matematycznym. Znajdziemy tu również informacje o wykładach z matematyki dla młodzieży szkolnej w Leningradzie. To nie pomyłka piszącego te słowa. Powojenny świat matematyczny w Polsce miał dość ścisłe związki z naszymi sąsiadami, również na wschodzie.

Zadania matematyczne wszelkiego rodzaju były zawsze głównym elementem „Matematyki”. Znajdujemy je w różnych postaciach – zadania z olimpiad zarówno polskich, jak i zagranicznych, zadania od czytelników oraz zadania w rubryce **Służymy dobrą radą**.

Przyznam, zawsze podziwiam szatę graficzną tych najstarszych numerów „Matematyki”. Papier był wprawdzie kiepskiej jakości, ale skład czasopisma był wręcz idealny. Rysunki i wykresy były zrobione z taką perfekcją, jaką trudno znaleźć w czasach komputerów i programów geometrycznych czy graficznych. Wydaje się, że w tamtych czasach graficy nie mieli problemów ze składem tekstów naszpikowanych wzorami i wykresami. Pamiętajmy, w tamtych czasach nie było jeszcze LaTeXa, który pojawił się wiele lat później, bo dopiero w roku 1978. Nie było również komputerów.

Kończąc ten wstęp, chciałbym zachęcić Czytelników do kolekcjonowania i czytania dawnych numerów „Matematyki dla Nauczycieli”. Znajdziecie tam wiele interesujących i niezmiennie pomocnych informacji. Jest to jeden z największych skarbów polskiego świata matematycznego.


MIROSLAW MAJEWSKI
redaktor prowadzący



W TYM NUMERZE

■ **Matematyka dawniej i dziś**

- 4 Wielokąty foremne i gereh (cz. 2)
- 43 Wpływ odzyskania niepodległości przez Polskę na nauczanie matematyki w szkołach średnich

■ **Testy i sprawdziany**

- 11 Zadania dla klas 4 –6 szkół podstawowych
- 13 Zadania dla starszych klas szkół podstawowych i gimnazjów
- 15 Zadania dla młodszych klas liceów
- 17 Zadania dla starszych klas liceów

■ **Koło matematyczne**

- 19 Rozwijanie uczniowskich predyspozycji matematycznych w kontekście zadań tekstowych
- 24 Magiczne liczby zespolone
- 29 Matematyka w biegu – list z wakacji
- 31 Zarys programu nauczania trygonometrii w USA
- 34 Trójkąt prostokątny – kąty

■ **Nowe technologie w matematyce**

- 37 Matematyka z *GeoGebra*. Punkty szczególne trójkąta
- 39 Konstrukcje geometryczne a *GeoGebra*

■ **Rusz głową**

- 49 Matematyka ze świątyni (cz. 2)

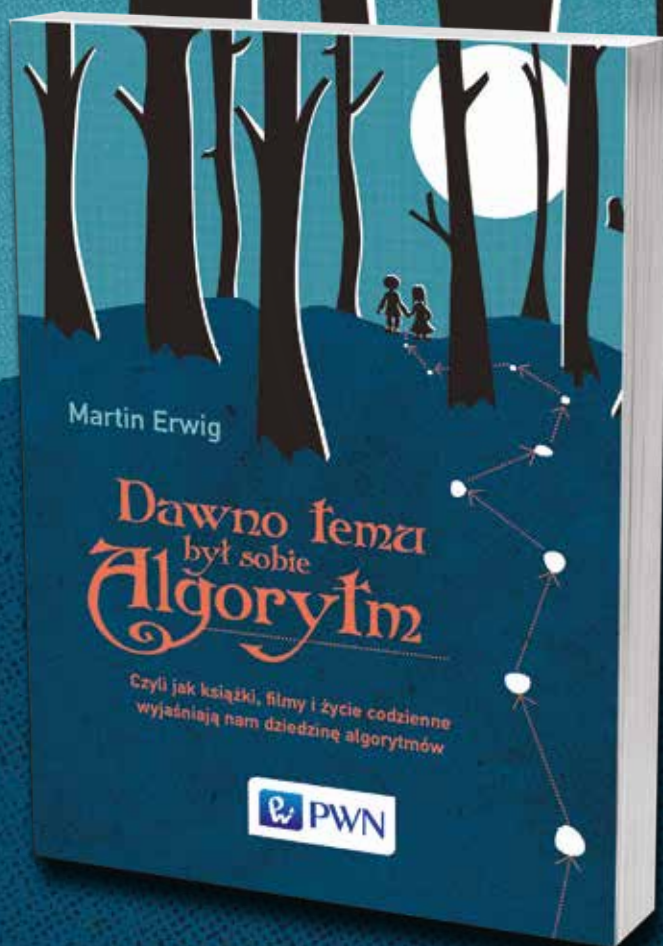
■ **Matematyka inaczej**

- 52 Bryły archimedesowe nieco inaczej
- 55 Mały ścięty dwunastościan gwiazdzisty

Jeśli mają Państwo jakiegokolwiek sugestie odnośnie do naszego czasopisma – prosimy pisać na adres e-mailowy: matematyka@forum-media.pl
Zapraszamy także na nasz Facebook: <https://www.facebook.com/czasopismomatematyka/>



Dawno, dawno temu...



Polecamy:



ODWIEDŹ NAS NA

IT.PWN.PL

i zapisz się na newsletter!



KSIEGARNIA.PWN.PL

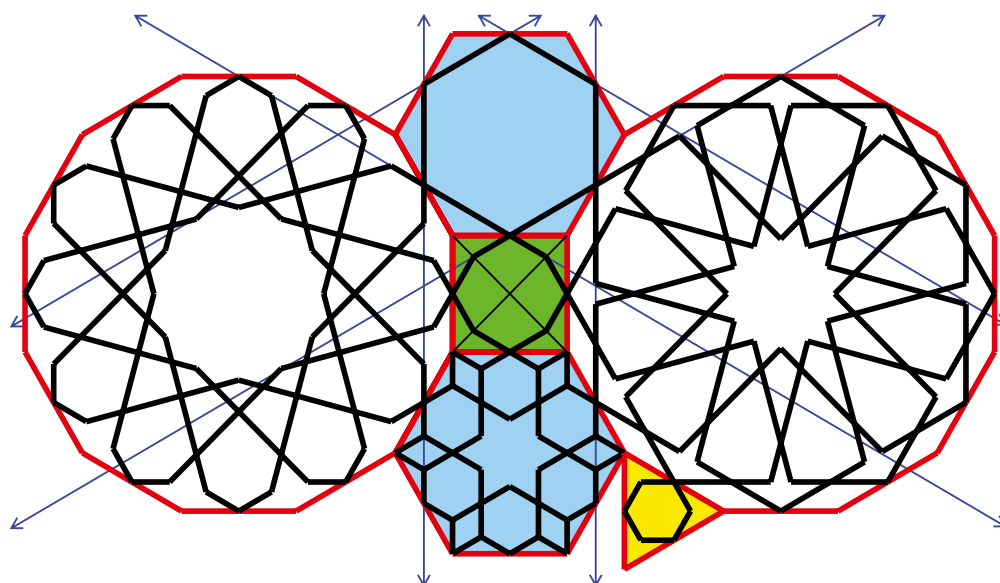
AUTOR: MIROSŁAW MAJEWSKI

WIELOKĄTY FOREMNE I GEREH (CZ. 2)

W poprzedniej części tego szkicu pokazaliśmy, w jaki sposób, wypełniając wielokąty foremne – trójkąt, kwadrat, sześciokąt i dwunastokąt – różnego rodzaju wzorami, możemy skonstruować gereh. Omówiliśmy dwie grupy takich wzorów. Nazwaliśmy je umownie geometriami wzoru typu A i B. Wypełnienia w typie A były zależne od linii łączących środki boków trójkąta. Natomiast typ B otrzymaliśmy, łącząc liniami prostymi środki sąsiednich boków kwadratu. W tej części szkicu kontynuujemy nasze eksploracje.

GEOMETRIA WZORU TYPU C

Biorąc sześciokąt foremny jako figurę wyjściową do tworzenia gerehu, przechodzimy do nieco innego świata. Oto, co tym razem możemy otrzymać.



GEOMETRIA TYPU C

Łącząc środki sąsiednich boków sześciokąta foremnego, otrzymamy kolejny, nieco mniejszy sześciokąt. Ten wzór zostawia wiele pustego miejsca w sześciokącie, w które można wstawić dodatkowe dekoracje. W dolnej części ryciny pokazałem wypełnienie sześciokąta, zaczerpnięte z mauzoleum Amir Sungur Sa'di z Kairu. Konstrukcje obu rozet w dwunastokątach zostały omówione w szkicu 7 („Matematyka” nr 1/2018).

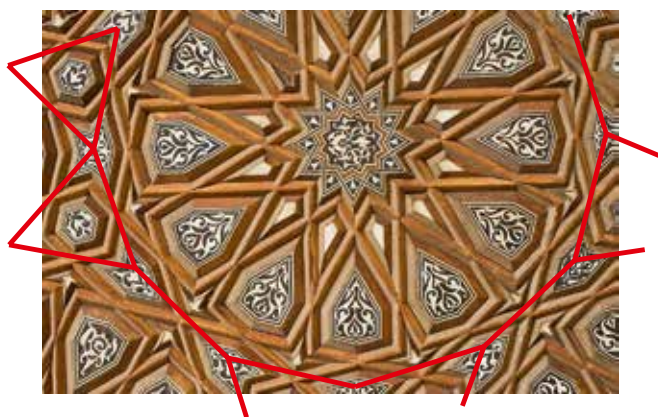
PROJEKT 3.6 – GEREH Z MECZETU AL RIFA'I Z KAIRU

W tym projekcie zabawimy się w detektywów. Naszym zadaniem będzie odtworzenie gerehu, mając tylko jego fragment.



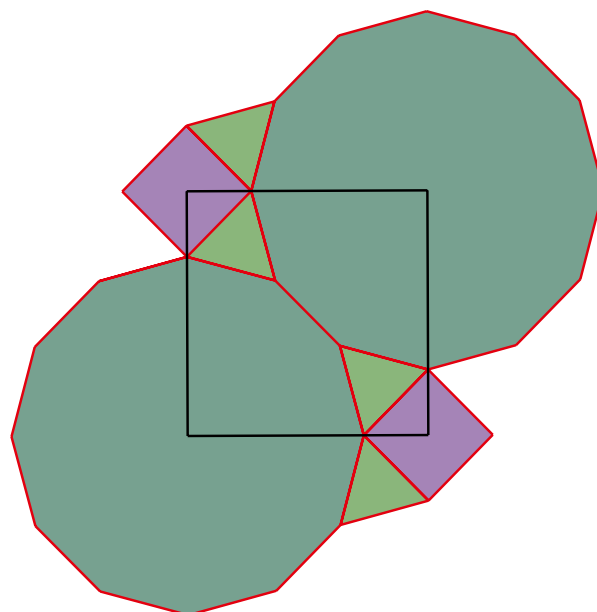
FRAGMENT WZORU Z DRZWI MECZETU AL RIFA'I Z KAIRU

Pokazany tu fragment drzewi może posłużyć nam do wykonania gerehu, identycznego lub podobnego do pokazanego motywu. Zauważmy, że mamy tu rozetę dwunastoramienną oraz dwa sześciokąty foremne. Obie te figury są identyczne z tymi, które pokazaliśmy w geometrii typu C. Ponieważ mamy tylko niewielki fragment wzoru, nigdy nie będziemy mieć pewności, że nasza konstrukcja jest identyczna z tą na drzwiach, ale próbować warto.



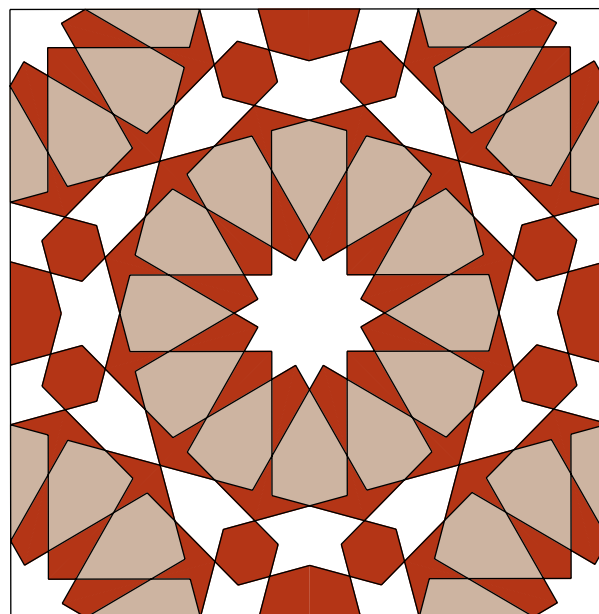
ANALIZA WZORU Z DRZWI MECZETU AL RIFA'I Z KAIRU

Na rycinie mamy pokazany jeszcze raz wzór z drzwi oraz dorysowaną na nim teselację, a właściwie jej fragment. Tu możemy się domyślić, że mamy dwa dwunastokąty o wspólnym boku oraz dwa trójkąty przyległe do dwunastokątów. Pomiędzy trójkątami widoczny jest fragment figury, która może być kwadratem. Prawa strona teselacji jest prawdopodobnie symetryczna z lewą stroną.



TESELACJA

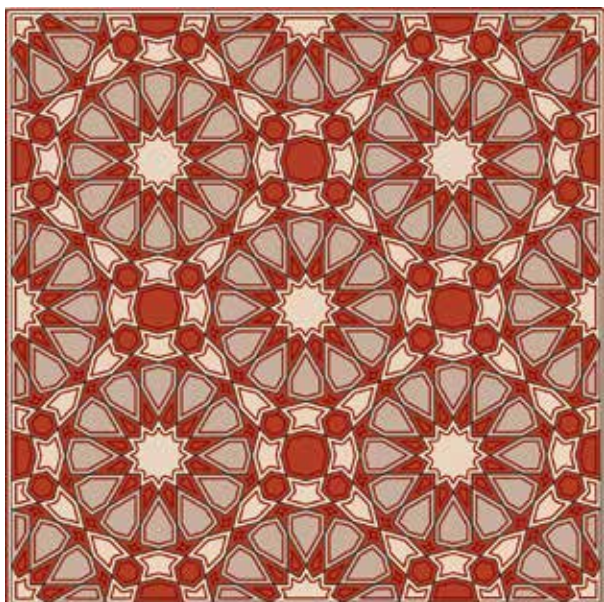
Tu pokazana jest możliwie najprostsza teselacja, odpowiadająca pokazanemu wcześniej fragmentowi drzewi. Nie wykluczam, że Czytelnik znajdzie kilka innych teselacji zawierających pokazany tu fragment w czarnym kwadracie. Niemniej dla naszych potrzeb pokazana tu teselacja jest w pełni wystarczająca. Wypełniamy wzorem ćwiartki obu dwunastokątów, oba trójkąty oraz ćwiartki kwadratów. Do wypełnienia wielokątów wykorzystujemy wzory pokazane na rycinie z geometrią typu C. Jak pamiętamy, można to zrobić na dwa sposoby. My wybieramy rozetę pokazaną z prawej strony oraz proste wypełnienia kwadratu i trójkąta. To wystarczy do tego, aby odtworzyć wzór podobny do tego na drzwiach.



REKONSTRUKCJA WZORU Z DRZWI MECZETU AL RIFA'I Z KAIRU

Pokazany tu gereh powstał z czterech kopii teselacji wypełnionej wzorem. Zauważmy, że użyliśmy tu dokładnie takiego samego wypełnienia wzorem jak na fotografii. Możemy jednak pokusić się i wypełnić tę samą teselację zupełnie innymi wypełnieniami, spełniającymi warunki geometrii typu C. O tym jednak za chwilę.

Pokazany przed chwilą wzór jest arcydziełem egipskiej sztuki snycerskiej. Jednakże jego bardziej kompletną strukturę możemy zobaczyć, pokrywając nim większy fragment płaszczyzny.



WZÓR Z DRZWI MECZETU AL. RIFA'I Z KAIRU

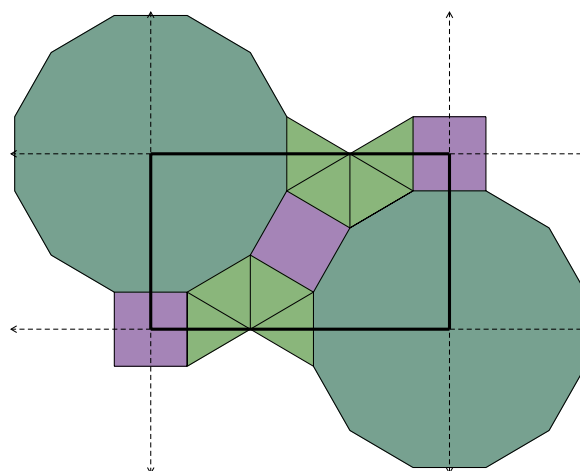
Tym razem mamy pokazany gereh pokrywający większy fragment płaszczyzny. Tu widać, jaki wpływ na wzór mają symetrie poszczególnych wielokątów foremnych. Szczególnie ciekawie wyglądają fragmenty zbudowane w dwunastokącie i w otoczeniu kwadratu.

Do gerehu z drzwi w meczecie Al Rifa'i wrócimy za chwilę, kiedy zbudujemy go, korzystając z innej interpretacji rozety. Zanim przejdziemy do kolejnych przykładów, przypomnijmy jeszcze pochodzenie nazwy meczetu, z którego pochodzi ten gereh.

Al-Rifa'i (1118–1181/2) urodził się w Iraku. Jego pełne imię jest równie malownicze jak okres, w którym przyszło mu żyć: Ahmad ibn `Ali ar-Rifa'i (أحمد بن علي الرفاعي), czyli Ahmad syn Alego ar Rifa'i. Al-Rifa'i jest znany jako twórca zakonu Rifa'i Sufi. Jego grób i sanktuarium znajdują się w pobliżu Tal Afar w północnym Iraku. Powszechnie uważa się go za jednego ze świętych islamu. Stąd nazwa meczetu w Kairze.

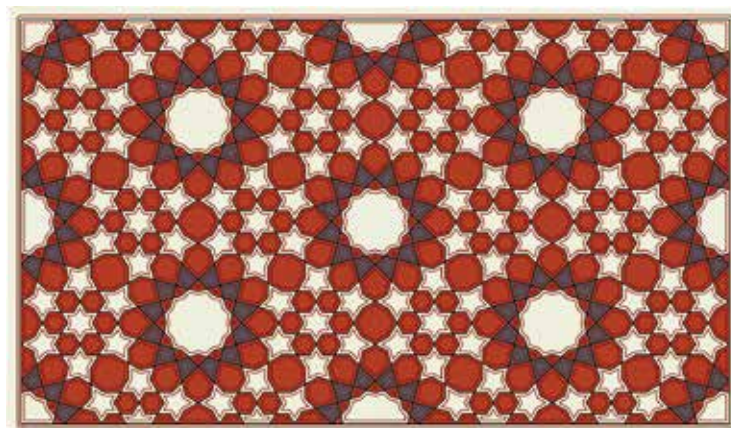
PROJEKT 3.7

Jak już zauważyliśmy, każda teselacja wielokątami foremnymi może posłużyć do stworzenia gerehu z użyciem dotychczas poznanych elementów. Pewne z tych teselacji są na tyle proste, że utworzenie gerehu wymaga niewiele pracy, inne zaś będą wymagały znacznie więcej czasu zarówno na skonstruowanie teselacji, jak i na wypełnienie jej wzorem. W naszym przypadku chcemy pokazać, jak wygląda duża rozeta w otoczeniu mniejszych elementów.



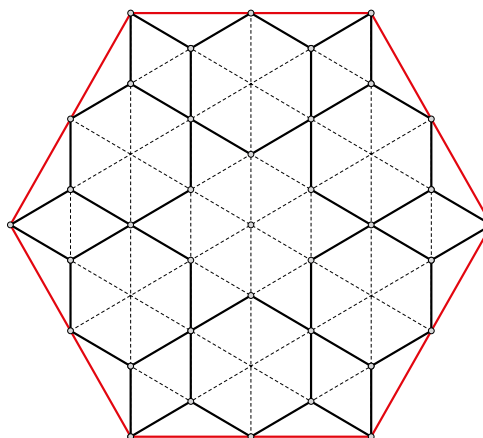
TESELACJA DO PROJEKTU 3.7

Tym razem nasza teselacja jest nieco bardziej złożona niż ta z poprzedniego projektu. Mamy tu dwie rozety, trzy kwadraty oraz osiem trójkątów. To wystarczy do tego, aby stworzyć stosunkowo złożony gereh, niewymagający jednak zbyt wiele pracy.



WZÓR Z WYKORZYSTANIEM GEOMETRII TYPU C

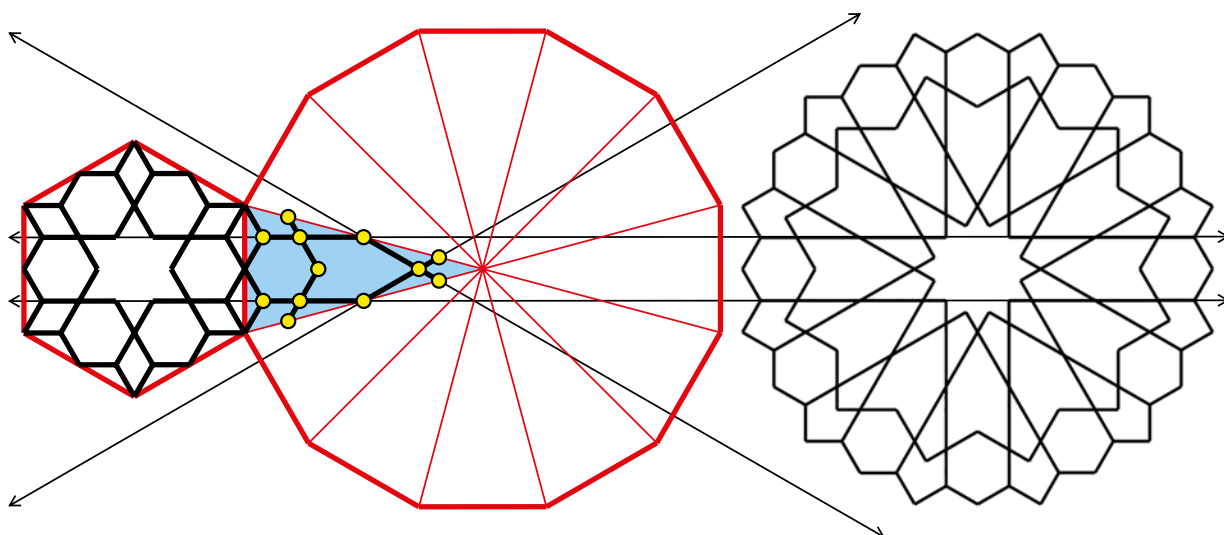
Na rycinie pokazany jest jeden z wielu możliwych wyników tego projektu. Tu użyliśmy 16 kopii naszego szablonu. Można wziąć ich więcej lub mniej. To zależy tylko od tego ile mamy czasu na ten projekt. Możemy użyć również drugiego typu rozety z geometrii typu C. Te eksperymenty pozostawiam Czytelnikom.



GWIAZDA Z MAUZOLEUM AMIR SUNGUR SA'DI

Ta gwiazda zbudowana jest na siatce trójkątów równobocznych. Zauważmy, że siatka ta może być wykorzystana do wykonania kilku innych deseni wypełniających sześciokąt foremny.

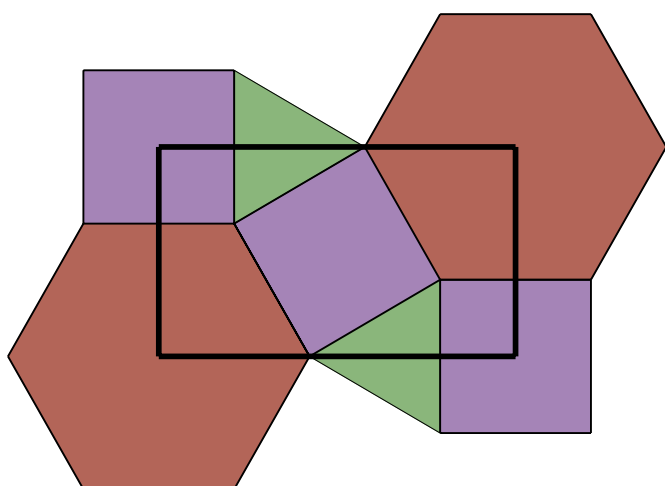
Tak skonstruowana gwiazda jest szczególnie przydatna do budowy ornamentów teselacji składającej się wyłącznie z sześciokątów foremnych. Aczkolwiek możemy skonstruować rozetę wykorzystującą ten sam motyw. Jej konstrukcja jest pokazana na kolejnej rycinie.



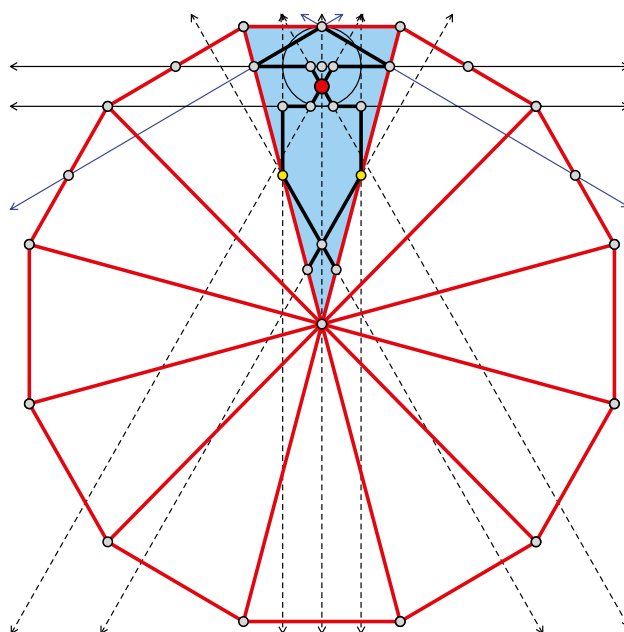
Tak utworzona rozeta prawdopodobnie nigdy nie została użyta, ale nic nie stoi na przeszkodzie, aby ją wykorzystać. W ten sposób otrzymano nową wersję gerehu z meczetu Al-Rifa'i oraz wielu innych.

PROJEKT 3.8

Wykonaj gereh wykorzystujący pokazaną tu teselację i gwiazdę z mauzoleum Amir Sungur Sa'di.

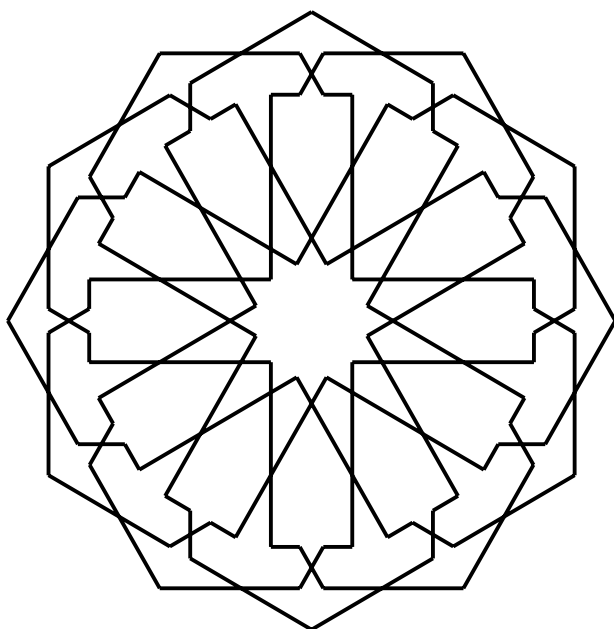


W Maghrebie istnieje pewien szczególny typ rozety, która może być bardzo prosto skonstruowana na dwunastokacie foremnym. Deseń tej rozety będziemy określać jako „młotkowy”, jako że jego elementy są nieco podobne do młotków. Rozety tego typu pojawiają się czasami w różnych mozaikach na ścianach budowli.



SCHEMAT KONSTRUKCJI ROZETY MŁOTKOWEJ

Na rycinie mamy pokazany dwunastokąt foremny i motyw wpisany w jeden z trójkątów, na które podzieliiliśmy dwunastokąt. Dwie ciągłe czarne linie oraz okrąg wyznaczają kształt płatka rozety. Zauważmy, że czarne ciągłe linie przechodzą odpowiednio przez dwa wierzchołki i środki dwóch boków dwunastokąta. Płatek rozety ma szerokość równą dwóm odległościom pomiędzy czarnymi ciągłymi liniami. Linie przerywane przechodzące przez czerwony duży punkt mogą przecinać się pod dowolnym kątem. Tu 60 stopni. Linie przerywane służą tylko jako siatka do narysowania płatka rozety. Powtarzając ten motyw w pozostałych częściach dwunastokąta, otrzymamy rozetę młotkową.



ROZETA MŁOTKOWA

Ten rodzaj rozety występuje głównie w Maroku, a w różnych albumach można znaleźć kilka jej wariantów. Jeden z nich zobaczymy na okładce książki, której autorem jest Bourgoïn. Ciekawostką jest, że w samej książce tej rozety nie znajdziemy. Przypuszczalnie wydawca zdecydował o użyciu tej rozety, aby uatrakcyjnić jej szatę graficzną. Podobną rozetę pokazuje Prisse d'Avennes w swojej książce na stronie 109. U niego jednak krawędzie płatków rozety nie są równoległe.

Rozeta młotkowa jest popularnym elementem wzorów geometrycznych zarówno w Maroku, jak i Andaluzji, czyli południowej Hiszpanii. Tam najczęściej występuje w postaci ceramicznej mozaiki, tzw. zillij lub zellige. Technikę wykonania takiej mozaiki pokazujemy na kolejnej rycinie.



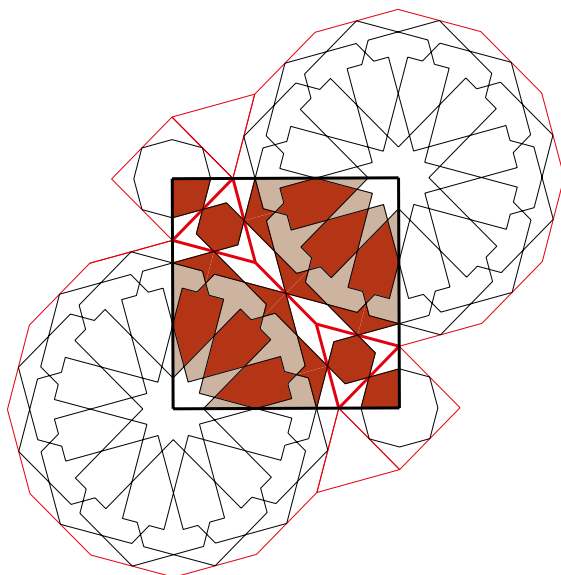
TECHNIKA ZELLIGE

Na zdjęciu mamy pokazaną pracownię zellige w miejscowości Fez w Maroku. Artyści wycinają poszczególne elementy mozaiki z ceramicznych płytek uprzednio pokrytych glazurą i wypalonych. Następnie takie elementy są układane na płaskiej powierzchni stroną glazurowaną na dół i całość jest zalewana masą cementową. Po wyschnięciu masy otrzymujemy panele gotowe do przymocowania do ściany. Takie panele widoczne są za plecami rzemieślników na fotografii. Zauważmy, jak prymitywne narzędzia są wykorzystywane w tej pracy. Fot. Jadcooper – Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=53998472>

ROZETA MŁOTKOWA WYKONANA W DREWNI

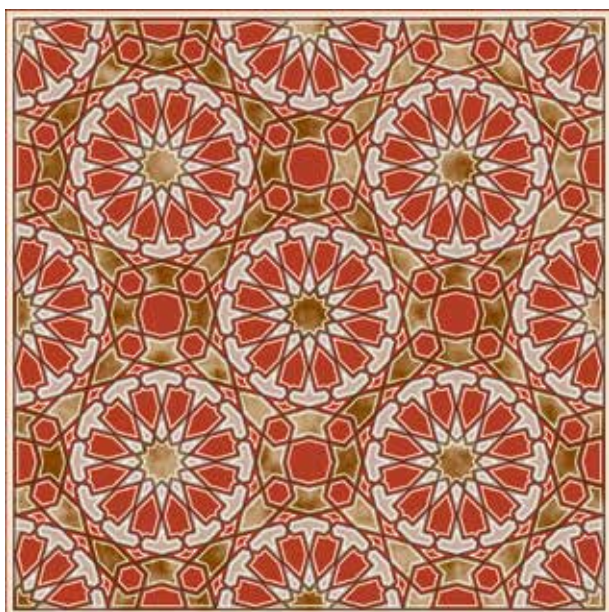
Tu mamy rozetę młotkową ze starych drzew z obszaru Maroka.





SZABLON WZORU Z AL-RIFA'I Z ROZETĄ MŁOTKOWĄ

Na rycinie mamy dokładnie tę samą teselację co w projekcie 3.6, ale tym razem dwunastokąty zostały wypełnione rozetą młotkową. Deseń w trójkątach i kwadratach pozostały dokładnie te same co poprzednio. Kolorowy fragment jest tym, co tworzy szablon wzoru. Tylko tyle potrzeba, aby powstał jeden z bardziej interesujących wzorów, łączący motywy geometryczne z Egiptu i Maghrebu. Na kolejnej rycinie pokazujemy wariant wzoru z meczetu Al-Rifa'i wykorzystujący rozetę młotkową. Ten guruh powstał z wykorzystaniem 4 x 4 kopii szablonu.

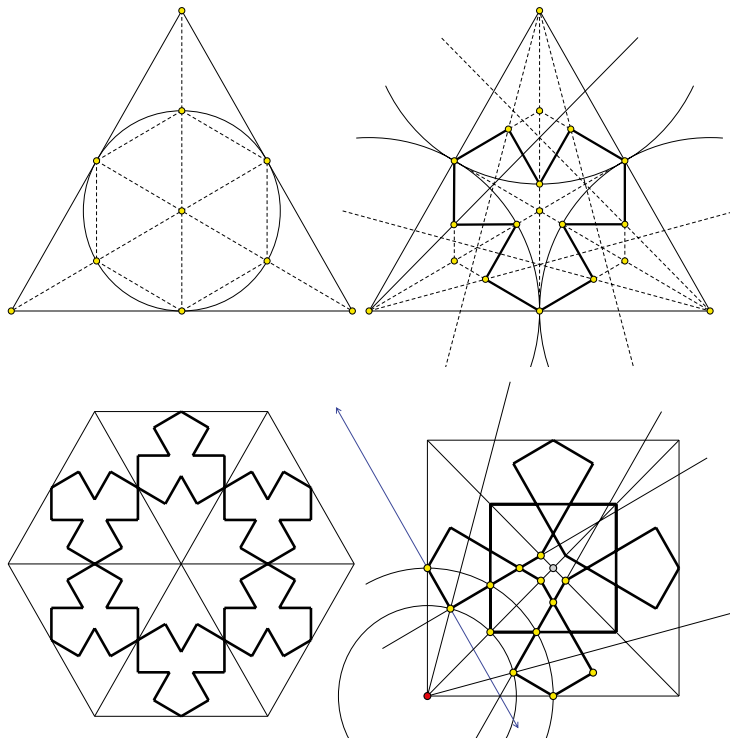


PROJEKT 3.9

Powtórz projekt 3.7, wykorzystując tym razem rozetę młotkową.

Wypełnienie trójkąta i kwadratu w geometrii wzoru typu C jest trochę mało interesujące. Możemy wypełnić je inaczej, zachowując kąty wzoru na brzegach wielokątów. Najprościej jest rozpocząć od trójkąta. Wiemy, że w przypadku tego typu deseń w trójkącie tworzy sześciokąt foremny, tak jak to pokazujemy na kolejnej rycinie z lewej strony. Dzielimy każdy z kątów trójkąta

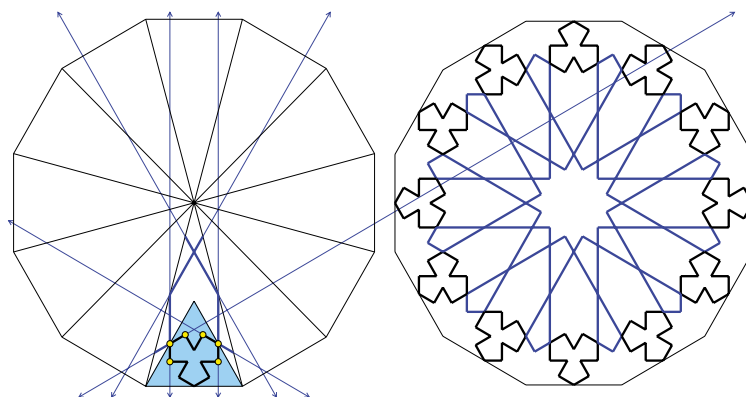
na 4 równe części i dalej łącząc odpowiednie punkty, otrzymamy deseń pokazany na prawej części ryciny. Takie rozwiązanie pokazuje Bourgoin (1973) na planszy 96. Jest to wzór pochodzący z domu Kritiya w Kairze. Obecnie jest tam muzeum Gayer-Andersona. Ten pomysł wystarczy nam do tego, aby skonstruować deseń w pozostałych wielokątach foremnych używanych w tym szkicu.



DESEŃ W SZEŚCIOKĄCIE I KWADRACIE

Konstrukcja tych deseni jest dość prosta. Sześciokąt foremny składa się z 6 trójkątów równobocznych. Wystarczy zatem wypełnić desieniem każdy z nich. Konstrukcja desenia wewnątrz kwadratu opiera się dokładnie na tym samym pomysle jak w przypadku trójkąta.

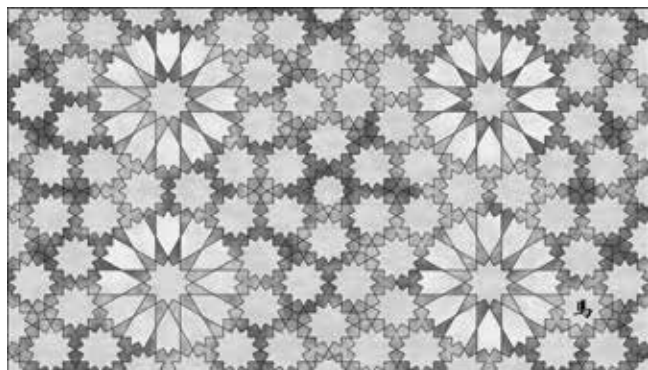
Skoro już poprawiliśmy tyle, to możemy pokusić się jeszcze o zrobienie rozety pasującej do wzoru na trójkącie i kwadracie.



DESEŃ W DWUNASTOKĄCIE

Dzielimy dwunastokąt na trójkąty, a następnie w jeden z nich wstawiamy deseń z trójkąta równoramiennego (zaciemniony obszar). Następnie przedłużamy pewne jego boki tak, jak to pokazano na rysunku. W celu otrzymania kompletnej rozety wystarczy skopiować wzór z długiego trójkąta na pozostałe.

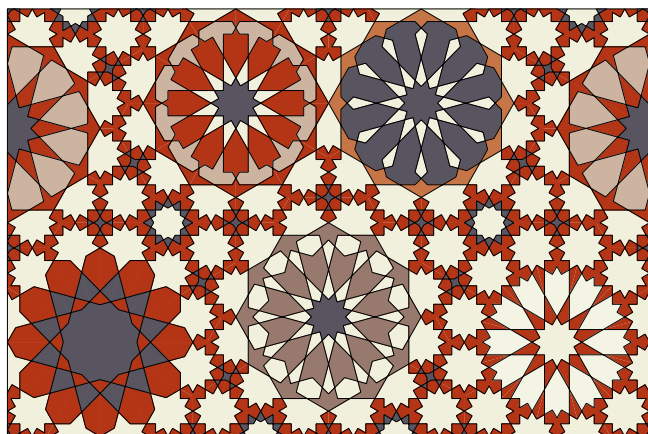
To, co otrzymaliśmy do tej pory, ma dla nas bardzo ciekawe konsekwencje. Możemy skonstruować setki wzorów o bardzo interesującej i trudnej do odkrycia strukturze. Dodając do tych elementów kolor, nawet najbardziej podstawowy, np. odcienie szarości, tworzymy coś, co jest atrakcyjną formą wzoru. Oto jeden z wzorów możliwych do wykorzystania z elementami stworzonymi na tej i poprzedniej stronie.



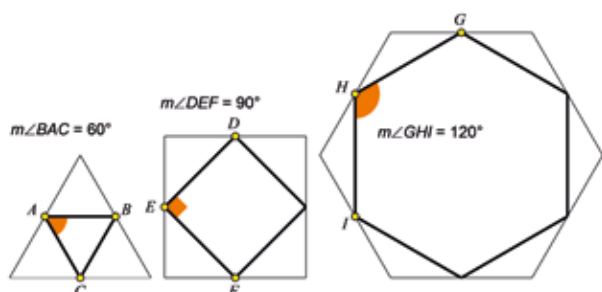
Rodzaje rozet spełniających wymogi geometrii typu C są niezliczone. Mamy tu ogromne bogactwo motywów i zastosowań.

Na kolejnej rycinie pokazuję rozety, które omówiliśmy w tej części szkicu. Przestrzeń pomiędzy rozetami wypełniliśmy motywami z domu Kritiya w Kairze. Przypuszczam, że Czytelnik z łatwością odtworzy teselację tego wzoru i wskaże te elementy gerehu, które pochodzą z domu Kritiya.

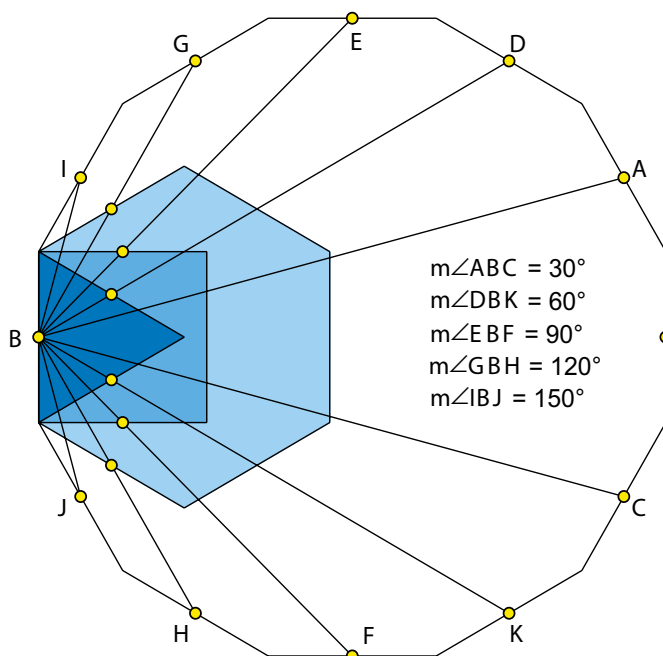
Zauważmy, że o konstrukcji dwóch rozet widniejących na rysunku nie powiedzieliśmy ani słowa. Proponuję, aby Czytelnik wskazał te rozety na rysunku i odtworzył ich konstrukcję samodzielnie. Będzie to z pewnością interesujące zajęcie.



W tym szkicu, tej i poprzedniej części, omówiliśmy dotychczas zaledwie trzy typy geometrii wzorów wypełniających teselację z wielokątami foremnymi – dwunastokątem, sześciokątem, kwadratem i trójkątem – oraz kilka wariantów tych wypełnień.



Zasadniczo poszczególne typy różnią się tylko tym, w jaki sposób linie wzoru wchodzą do wielokąta. Mieliśmy kolejno: 30 stopni pomiędzy liniami (typ A), 90 stopni (typ B) oraz 120 stopni (typ C). Zauważmy, że nie operowaliśmy bezpośrednio kątami. Nasze kąty zależały od figury, którą jako pierwszą użyliśmy do wypełniania wzorem. Pokazaliśmy to na kolejnej rycinie. To, oczywiście, nie koniec tej historii. Dotychczas nie powiedzieliśmy nic o tym, co się stanie, gdy nasz kąt będzie inny. Rycina kończąca ten tekst pokazuje, że co najmniej dwie możliwości powinniśmy jeszcze wziąć pod uwagę. Są to kąt 150 stopni oraz kąt 30 stopni, niemający odpowiednika w żadnym z wielokątów foremnnych.



W kolejnych częściach tego szkicu pokażemy dalsze możliwości wypełnienia wielokątów foremnnych deseniem spełniającym reguły gerehu.

Bibliografia:

1. d'Avennes P, *Islamic Art In Cairo – from Seventh to the eighteenth Centuries*, with introduction by George T. Scanlon, A Zeitouna Book, The American University in Cairo Press, Kair – Nowy Jork 1999.
2. Bourgojn J., *Arabic Geometrical Pattern and Design*, Dover Publications Inc, Nowy Jork 1973.
3. Clevnot D., Degeorge G., *Ornament and decoration in Islamic Architecture*, Thames & Hudson, Nowy Jork 2000.
4. Jaśkowski S., *O symetrii w zdobnictwie i przyrodzie*, PZWS, Warszawa 1952.
5. Majewski M., *Szkice o geometrii i sztuce: gereh – geometria w sztuce islamu*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2017.

Mirosław Majewski

Matematyk, geometra z wykształcenia, autor poszukujący związków geometrii ze sztuką i architekturą.

AUTOR: MICHAŁ KREMZER

ZADANIA DLA KLAS 4–6 SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

Zadania sprawdzają następujące umiejętności: analizy i interpretacji problemu, rozumowania i argumentacji, syntezy faktów i myślenia pamięciowego oraz umiejętności heurystyczne.



Zadanie 1 W dacie 11.11.2018 numer dnia i miesiąca jest równy sumie cyfr numeru roku. Kiedy ostatni raz (przed tą datą) była data o tej własności?

Zadanie 2 Podać ostatni rok (przed rokiem 2018), w którym nie istniała data o własności z poprzedniego zadania.

Zadanie 3 W dacie 11.11.2018 w numerze dnia, miesiąca i roku iloczyn pierwszej i ostatniej cyfry jest kwadratem kwadratu liczby naturalnej dodatniej. Kiedy ostatni raz (przed tą datą) była data o tej własności z dwucyfrowymi numerami dnia i miesiąca?

Zadanie 4 W dacie 11.11.2018 suma cyfr numeru dnia, miesiąca i roku jest liczbą pierwszą. Kiedy ostatni raz (przed tą datą) była data o tej własności z dwucyfrowymi numerami dnia i miesiąca?

Zadanie 5 W dacie 11.11.2018 suma dzielników pierwszych numeru roku ma końcówkę dwucyfrową równą numerowi dnia i miesiąca. Kiedy ostatni raz (przed tą datą) była data o tej własności z dwucyfrowymi numerami dnia i miesiąca?

Zadanie 6 W dacie 11.11.2018 suma cyfr numeru dnia i miesiąca jest równa dwukrotności trzeciej cyfry numeru roku oraz ostatnia cyfra numeru roku jest sześcianem sumy cyfr numeru miesiąca.

Kiedy ostatni raz (przed tą datą) była data o tej własności z dwucyfrowymi numerami dnia i miesiąca?

Zadanie 7 W dacie 11.11.2018 suma cyfr numeru dnia i miesiąca jest równa pierwszej cyfrze numeru roku i dwukrotności trzeciej cyfry numeru roku oraz ostatnia cyfra numeru roku jest sześcianem sumy cyfr numeru miesiąca. Kiedy ostatni raz (przed tą datą) była data o tej własności z dwucyfrowymi numerami dnia i miesiąca?

Zadanie 8 W roku 1918 iloczyn dwóch pierwszych cyfr jest równy sumie dwóch ostatnich cyfr. Podać ostatni rok (przed rokiem 1918) o tej własności, w numerze którego nie występowała cyfra 0.

Zadanie 9 Liczbą palindromiczną nazywamy liczbę, która – czytana od tyłu – daje tę samą liczbę co czytana od przodu. Podać ostatni rok (przed rokiem 2018) o numerze będącym liczbą palindromiczną.

Zadanie 10 Podać ostatni rok (przed rokiem 1918) o numerze będącym liczbą palindromiczną.

Zadanie 11 Podać ostatni rok (przed rokiem 2018) o numerze będącym kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 12 Podać ostatni rok (przed rokiem 1918) o numerze będącym kwadratem liczby naturalnej.



Zadanie 13 Podać ostatni rok (przed rokiem 2018) o numerze będącym sześcianiem liczby naturalnej.

Zadanie 14 Podać ostatni rok (przed rokiem 1918) o numerze będącym sześcianiem liczby naturalnej.

Zadanie 15 Przedstawić liczbę 2018 w postaci sumy trzech liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają parami różne reszty.

Zadanie 16 Przedstawić liczbę 1918 w postaci sumy trzech liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają parami różne reszty.

Zadanie 17 Przedstawić liczbę 2018 w postaci sumy dwóch (niekoniecznie różnych) liczb palindromicznych.

Zadanie 18 Przedstawić liczbę 1918 w postaci sumy dwóch (niekoniecznie różnych) liczb palindromicznych.

Zadanie 19 Podać ostatni rok (przed rokiem 2018), którego numer można ułożyć z cyfr: 0, 1, 2, 8.

Zadanie 20 Podać ostatni rok (przed rokiem 1918), którego numer można ułożyć z cyfr: 1, 1, 8, 9.

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1 10.10.2017.

Zadanie 2 1999.

Zadanie 3 28.11.2008.

Zadanie 4 30.12.2014.

Zadanie 5 12.12.2016.

Zadanie 6 11.11.1918.

Zadanie 7
Nie było w naszej erze takiej daty.

Zadanie 8 1871.

Zadanie 9 2002.

Zadanie 10 1881.

Zadanie 11 1936.

Zadanie 12 1849.

Zadanie 13 1728.

Zadanie 14 1728.

Zadanie 15 Przedstawienie takie jest niemożliwe. Suma trzech liczb dających różne reszty przy dzieleniu przez 3 jest liczbą podzielną przez 3, natomiast 2018 nie jest liczbą podzielną przez 3.

Zadanie 16
Przedstawienie takie jest niemożliwe.

Zadanie 17 $2018 = 797 + 1221$.

Zadanie 18 $1918 = 959 + 959$.

Zadanie 19 1820.

Zadanie 20 1891.

Michał Kremzer

Autor zadań i artykułów.

AUTOR: MICHAŁ KREMZER

ZADANIA DLA STARSZYCH KLAS SZKÓŁ PODSTAWOWYCH I GIMNAZJÓW

Zadania sprawdzają następujące umiejętności: analizy i interpretacji problemu, rozumowania i argumentacji, syntezy faktów i myślenia pamięciowego oraz umiejętności heurystyczne.



Zadanie 1 Kiedy iloczyn trzech liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1?

Zadanie 2 Rozwiązać w liczbach dodatnich a, b, c, d układ równań:
 $a + b = 2c$
 $(c - a)(c - b) = d$

Zadanie 3 Wszystkie kąty trapezu T są równe kątom trapezu W . Długości podstaw trapezu T wynoszą 7 i 9. Wysokość tego trapezu wynosi 1. Długość dłuższej podstawy trapezu W jest równa 12, wysokość trapezu W wynosi 2. Obliczyć pole trapezu W .

Zadanie 4 Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Rozstrzygnąć, czy zawsze prawdziwa będzie nierówność $Sa > 6V$, gdzie a, S, V oznaczają odpowiednio długość krawędzi podstawy, pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa.

Zadanie 5 Liczby naturalne a i b są większe od miliona. Wszystkie cyfry tych liczb (oprócz pierwszych i ostatnich) są równe 0. Wyznaczyć cyfrę jedności, dziesiątek i setek liczby $a + b$.

Zadanie 6 Pierwsza cyfra liczby naturalnej n jest równa:

- A) 1
- B) 7

Ile wynosi pierwsza cyfra liczby $2n$?

Zadanie 7 Długość przekątnej czworokąta wypukłego wynosi 9. Obwód tego czworokąta jest liczbą całkowitą. Ile co najmniej wynosi ten obwód?

Zadanie 8 Boki prostokąta P są równoległe do osi układu współrzędnych. Wierzchołki tego prostokąta są punktami kratowymi. Obwód prostokąta P jest równy sumie sum współrzędnych wszystkich wierzchołków tego prostokąta. Wyznaczyć wszystkie prostokąty o tej własności.

Zadanie 9 W zapisie dziesiętnym liczb naturalnych n i $n + 1$ wszystkie cyfry są większe od 1. Iloczyn iloczynów cyfr liczb n i $n + 1$ jest równy 14 406. Wyznaczyć wszystkie liczby n o tej własności.

Zadanie 10 Cyfra jedności liczby n jest większa od 5. Iloraz liczby n przez jej cyfrę jedności jest większy od 209 i mniejszy od 210. Wyznaczyć wszystkie liczby n o tej własności.

Zadanie 11 Jaś ma m lat i n miesięcy, za k miesięcy będzie miał n lat i m miesięcy. Ile wynosi k ?

Zadanie 12 Podać przykład trzech liczb naturalnych dających parami różne i niezerowe reszty z dzielenia przez 5, których suma jest liczbą podzieloną przez 5.



Zadanie 13 Wyznaczyć wszystkie trójki liczb a, b, c takie, że każda z tych liczb jest kwadratem liczby całkowitej oraz zachodzi układ równań:

$$a + b = c + 32$$

$$a - b = c$$

Zadanie 14 Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb pierwszych takie, że $18a < ab < 24a < 4(a + b)$.

Zadanie 15 Suma miar kątów wielokąta wypukłego (wyrażona w stopniach) jest

kwadratem liczby naturalnej.
Ile boków ma ten wielokąt?

Zadanie 16

Wszystkie krawędzie pewnego graniastosłupa prostego mają całkowite długości. Podstawą tego graniastosłupa jest wielokąt wypukły i różnoboczny, w którym długości wszystkich boków są mniejsze od 5. Pole jednej ze ścian bocznych wynosi 46. Wyznaczyć pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1 Wtedy, gdy każda z tych liczb daje resztę 1 lub gdy dwie z tych liczb dają resztę 3, trzecia resztę 1 (przy dzieleniu przez 4).

Zadanie 2 Układ nie ma rozwiązań.

Zadanie 3 20.

Zadanie 4 Tak. Wskazówka:
Wysokość ostrosłupa jest mniejsza lub równa wysokości ściany bocznej, przy czym równość zachodzi w co najwyżej dwóch ścianach bocznych.

Zadanie 5 Cyfra jedności – od 0 do 9, cyfra dziesiątek 0 lub 1, cyfra setek 0.

Zadanie 6

A) 2 lub 3.

B) 1.

Zadanie 7 19.

Zadanie 8 Prostokąty, w których wierzchołek wysunięty najbardziej na lewo i jednocześnie najniżej ma współrzędne $(k, -k)$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 9 772.

Zadanie 10 1256, 1467, 1678, 1889.

Zadanie 11 Jest jedenaście możliwości:
0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110.

Zadanie 12 Nie ma takich liczb.

Zadanie 13 (16, 16, 0) lub (25, 16, 9).

Zadanie 14 (2, 19), (2, 23), (3, 19), (3, 23).

Zadanie 15 $5(k^2) + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną dodatnią.

Zadanie 16 Są trzy możliwości:
207, 230, 460.

AUTOR: MICHAŁ KREMZER

ZADANIA DLA MŁODSZYCH KLAS LICEÓW

Zadania sprawdzają następujące umiejętności: analizy i interpretacji problemu, rozumowania i argumentacji, syntezy faktów i myślenia pamięciowego oraz umiejętności heurystyczne.

LICEUM

GIMNAZJUM

SZKOŁA PODSTAWOWA



Zadanie 1 Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x takie, że liczby $4x + 7$ oraz $8x + 9$ są liczbami naturalnymi dodatnimi oraz liczba $4x + 7$ jest podzielna przez liczbę $8x + 9$.

Zadanie 2 Dla jakich liczb naturalnych n liczba $1455 \dots 532$ (n piątek między 4 i 3) jest podzielna przez 9?

Zadanie 3 Wyznaczyć nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że w zapisie liczby n występuje dokładnie jedna cyfra 0, w zapisie liczby $2n$ nie występuje zero i w zapisie liczby $3n$ występuje więcej niż jedna cyfra 0. Chodzi o zapis dziesiętny.

Zadanie 4 Suma pięciu potęg pewnej liczby naturalnej większej od 1 o wykładnikach będących liczbami całkowitymi (różnymi od 0 i 1) jest równa 65. Co to za liczba i co to za wykładniki?

Zadanie 5 Dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 (dla której to możliwe) podać przykład czworokąta wypukłego, w którym długość jednego z boków należy do przedziału $(n, n + 1)$, czterokrotność pola należy do przedziału $(n + 1, n + 2)$ oraz obwód należy do przedziału $(n + 2, n + 3)$.

Zadanie 6 Liczba a ma własność W , jeżeli jest liczbą wymierną, niecałkowitą, większą od 1 oraz cecha liczby a jest równa sumie licznika i mianownika mantysy liczby a (chodzi o mantysę w postaci ułamka nieskracalnego). Wyznaczyć największą liczbę o własności W , która jest mniejsza od 1000.

Zadanie 7 Wyznaczyć najmniejszą liczbę o własności W , która jest większa od 1000.

Zadanie 8 Podać przykład liczby o własności W , która jest jednocześnie kwadratem liczby wymiernej.

Zadanie 9 Czy suma wartości bezwzględnych pierwiastków trójmianu kwadratowego może być równa średniej geometrycznej wszystkich trzech współczynników tego trójmianu, jeżeli wszystkie te pięć liczb to liczby naturalne dodatnie?

Zadanie 10 Ile dzielników kwadratowych ma liczba naturalna dodatnia? Dzielnikiem kwadratowym nazywamy dzielnik, który jest kwadratem liczby naturalnej dodatniej.

Zadanie 11 Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne większe od 2, które są równe iloczynowi swoich dzielników kwadratowych właściwych.

Zadanie 12 Czy istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych nieparzystych i niepodzielnych przez 3, w zapisie których są co najmniej 4 różne cyfry i które są równe iloczynowi swojego największego dzielnika właściwego i sumy swoich cyfr?

Zadanie 13 Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \geq \mathbb{R}$ takiej, że zbiorem wartości funkcji:
A) $f(x)$ i $x + f(x)$
B) $f(x)$ i $xf(x)$
jest przedział $<0, 1>$.

Zadanie 14 Podać przykład nieskończonego podzbioru zbioru $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, w którym wykonalne



jest potęgowanie, ale nie jest wykonalne mnożenie.

Zadanie 15 Podać przykład nieskończonego podzbioru zbioru $N \setminus \{0, 1\}$, w którym wykonalne jest mnożenie, ale nie jest wykonalne potęgowanie.

Zadanie 16

Dana jest liczba naturalna dodatnia n . Wyznaczyć nieskończenie wiele czwórek (a, b, c, d) liczb naturalnych dodatnich spełniających układ równań:
 $ab = cd$
 $a + b = c + d + n$

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1 $x = -1$ lub $x = -(1/2)$.
 Wskazówka: $4x + 7 = kn$, $8x + 9 = n$,
 gdzie k i n są liczbami naturalnymi dodatnimi.

Zadanie 2 Dla liczb naturalnych n postaci $1, 8k - 2$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 3 33 ... 3406, liczba trójek poprzedzających czwórkę jest dowolną liczbą naturalną większą od 5.

Zadanie 4 2, 6, -2, -2, -2, -2
 lub 4, 3, -1, -1, -1, -1.

Zadanie 5 Dla $n = 2$ dobrym przykładem jest prostokąt o bokach długości 0,49 i 2,001. Dla $n > 2$ nie ma takiego przykładu.
 Wskazówka: Długość boku czworokąta wypukłego jest mniejsza od sumy długości pozostałych boków tego czworokąta.

Zadanie 6 $999 + (499 / 500)$.

Zadanie 7 $1000 + (1 / 999)$.

Zadanie 8 $121 / 9$.

Zadanie 9 Nie. Wskazówka: Rozważyć trójmian $f(x) = k(x + m)(x + n)$. W równaniu kwadratowym (do którego dojdziemy po odpowiednich przekształceniach) ze względu na niewiadomą m obliczyć deltę w zależności

od k i n . Różnica kwadratów dwóch liczb naturalnych dodatnich nie może wynosić 4.

Zadanie 10 Jeżeli liczba naturalna dodatnia n jest iloczynem potęg liczb pierwszych $p(1), p(2), \dots, p(m)$ o wykładnikach naturalnych dodatnich odpowiednio równych $k(1), k(2), \dots, k(m)$, to liczba dzielników kwadratowych liczby n jest równa $([k(1) / 2] + 1)([k(2) / 2] + 1) \dots ([k(m) / 2] + 1)$.

Zadanie 11 Kwadraty iloczynów dwóch różnych liczb pierwszych lub szóste potęgi liczb pierwszych.

Zadanie 12 Tak. Liczby 2100 ... 0301 (dowolna liczba zer między cyframi 1 i 3) spełniają warunki zadania.

Zadanie 13

A) Nie ma takiej funkcji.
 B) $f(x) = x$ dla x z przedziału $<0, 1>$,
 0 dla pozostałych x rzeczywistych.

Zadanie 14 Zbiór potęg właściwych (czyli potęg, w których podstawa i wykładnik są liczbami naturalnymi większymi od 1).

Zadanie 15 Nie ma takiego zbioru.

Zadanie 16 $(a, b, c, d) = (2b + 2n, b, b + n, 2b)$.
 Wskazówka: Przedstawić każdą z liczb a i c w zależności od liczb b i d .

AUTOR: MICHAŁ KREMZER

ZADANIA DLA STARSZYCH KLAS LICEÓW

Zadania sprawdzają następujące umiejętności: analiza i interpretacja problemu, rozumowanie i argumentacja, synteza faktów, myślenie pamięciowe, umiejętności heurystyczne.

LICEUM

GIMNAZJUM

SZKOŁA PODSTAWOWA



Zadanie 1 Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Rozwiązać w liczbach naturalnych a równanie

A) $S(a) = \log(a)$

B) $S(a) = \log(a - 5)$

Zadanie 2 Podać przykład nieskończonego ciągu (wzór ogólny z parametrem k będącym liczbą rzeczywistą), tak aby dla $k = 0$ ciąg ten był zbieżny do granicy równej 5, dla $k = 1$ był rozbieżny do plus nieskończoności oraz dla k ze zbioru $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ nie był zbieżny (ani do granicy właściwej, ani do niewłaściwej).

Zadanie 3 Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) , takie że liczby: a , logarytm przy podstawie a z liczby b , liczba dzielników naturalnych liczby b ; są liczbami pierwszymi.

Zadanie 4 Wyznaczyć największą liczbę naturalną n , dla której istnieje liczba rzeczywista dodatnia a , taka że dla każdego k ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ potęga liczby a o wykładniku k należy do przedziału $(k, k + 1)$. Dla wyznaczonej liczby n podać przykład liczby a spełniającej warunki zadania.

Zadanie 5 Dana jest liczba a większa od 3. Podać przykład funkcji $f(x)$ ciągłej w $\mathbb{R}$ i takiej, że granica funkcji $f(x)$ w plus i minus nieskończoności jest równa 1 oraz granica funkcji $f(f(x))$ w plus i minus nieskończoności jest równa a .

Zadanie 6 Podać przykład funkcji $f(n)$ odwzorowującej zbiór liczb naturalnych

dodatnich w ten sam zbiór, przyjmującej nieskończenie wiele wartości i takiej, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość $f(10n) = 10f(n)$ oraz dla nieskończenie wielu liczb naturalnych dodatnich n zachodzi równość $f(2n) = 4f(n)$.

Zadanie 7 Ile jest liczb stycyfrowych n , takich że iloczyn cyfr liczby n jest podzielny przez 147 oraz iloczyn iloczynów cyfr liczb n i $n + 1$ nie jest podzielny przez 4? Uwaga: liczba 0 jest podzielna przez każdą liczbę naturalną różną od 0.

Zadanie 8 Niech $[x]$ oznacza cechę liczby x oraz $f(a, b)$ oznacza potęgę liczby a o wykładniku b . Wyznaczyć nieskończenie wiele par (a, b) liczb niecałkowitych większych od 2, które spełniają równanie:
A) $f(a, b) = f([a], [b])$
B) $f(a, [b]) = f([a], b)$

Zadanie 9 Liczbą Sophie Germain nazywamy liczbę pierwszą p , taką że liczba $2p + 1$ również jest liczbą pierwszą. Liczbę Sophie Germain oznaczę przez SG. Jaką resztę z dzielenia przez 3 może dać liczba SG większa od 10? Podać wszystkie możliwości.

Zadanie 10 Jaką resztę z dzielenia przez 10 może dać liczba pierwsza większa od 10? Podać wszystkie możliwości.

Zadanie 11 Jaką resztę z dzielenia przez 10 może dać liczba SG większa od 10? Podać wszystkie możliwości.



Zadanie 12 Podać przykład niestałego wielomianu, który każdej liczbie SG przyporządkowuje liczbę bezkwadratową mającą dokładnie osiem dzielników naturalnych. Podać dwa takie przykłady i żeby wielomiany miały różne stopnie. Liczbą bezkwadratową nazywamy liczbę naturalną, która nie jest podzielna przez kwadrat liczby naturalnej większej od 1.

Zadanie 13 Jakie będzie rozwiązanie poprzedniego zadania, gdy osiem dzielników zastąpimy dziesięcioma dzielnikami?

Zadanie 14 Podać przykład parami różnych liczb dodatnich a, b, c, d , wśród których

co najmniej dwie są liczbami całkowitymi i które spełniają układ równań:

$$a + d = b + c$$

$$\sin(a + b) = \sin(c + d)$$

Zadanie 15 Niech $[x]$ i $\{x\}$ oznaczają odpowiednio cechę i mantysę liczby x . Niech k jest ustaloną liczbą całkowitą. Rozwiązać w liczbach całkowitych a równanie:

A) $a[1/a] = k$

B) $a\{1/a\} = k$

Zadanie 16 Funkcja $f(x)$ jest gęstością rozkładu prostokątnego zmiennej losowej. Kiedy funkcja $f(f(x))$ będzie funkcją gęstości rozkładu zmiennej losowej?

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1

A) $a = 10$

B) $a = 1000005$

Zadanie 2 $a(n) = A(n)B(n)$,

gdzie $A(n) = (n^2)|k| + 5$,

$B(n) = (-1)^{\text{nsign}(|k(k-1)|n))}$

Zadanie 3 (p, p^2) – p jest liczbą pierwszą

Zadanie 4 $n = 4$; $a = 1,45$

Wskazówka: Pierwiastek trzeciego stopnia z trzech jest większy od pierwiastka piątego stopnia z sześciu, co można stwierdzić, podnosząc obie te liczby do potęgi piętnastej.

Zadanie 5 $f(x) = (x^2 + 2a - 1)/(x^2 + 1)$

Zadanie 6 $f(n) =$ iloczyn liczby n i sumy jej cyfr

Zadanie 7 ab , gdzie $a = 1435896$, $b = 5^{96}$

Zadanie 8

A) Nie ma takich par.

B) $a = P(K(n) + 1)$, $b =$ logarytm

przy podstawie n z liczby $K(n) + 1$;

$K(n)$, $P(n)$ – kwadrat i pierwiastek

kwadratowy z n , $n > 5$

Zadanie 9 2

Zadanie 10 1, 3, 7, 9

Zadanie 11 1, 3, 9

Zadanie 12 $P(x) = 629x$, $W(x) = 17x(2x + 1)$

Zadanie 13 Nie ma takiego wielomianu.

Liczba dzielników naturalnych liczby bezkwadratowej jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

Zadanie 14 a, d – liczby całkowite dodatnie

$b = d - 2k(\pi i)$, $c = a + 2k(\pi i)$,

k – liczba naturalna dodatnia, $d > 2k(\pi i)$

Zadanie 15

A) Gdy $k = 0$ – zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Gdy $k > 0$, $a = -k$.

Gdy $k < 0$, równanie nie ma rozwiązań.

B) Gdy $k = 0$, $a = 1$ lub $a = -1$.

Gdy $k > 1$, równanie nie ma rozwiązań.

Gdy $k = 1$ – zbiór liczb całkowitych większych od 1.

Gdy $k < 0$, $a = k - 1$.

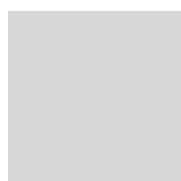
Zadanie 16

Wtedy i tylko wtedy gdy $f(0) = 0$ oraz $f(1/(b - a)) = 1/(b - a)$.

AUTOR: SYLWIA KANIA

ROZWIJANIE UCZNIOWSKICH PREDYSPOZYCJI MATEMATYCZNYCH W KONTEKŚCIE ZADAŃ TEKSTOWYCH

Operatywne stosowanie narzędzi matematycznych do opisu sytuacji przedstawionej w rozpatrywanym problemie jest kluczową umiejętnością pozwalającą na prawidłowy rozwój matematyczny indywidualnego ucznia. Prawidłowa analiza zadania, zrozumienie problemu, zastanowienie się nad sposobem rozwiązania, wykonanie zaplanowanych czynności i w końcu spojrzenie na zadanie w sposób całościowy, stanowią fundament rozumowania, które prowadzi do abstrakcyjnego pojmowania rozważanych treści. Polyowska metoda rozwiązywania zadań tekstowych, modyfikowana ze względu na cyfryzację rzeczywistości, jest w dalszym ciągu podstawą pracy nauczyciela z uczniem.



Wielkie matematyczne odkrycia bazują najczęściej na ogromnej wiedzy ich twórców i długiej, wytężonej pracy prowadzącej do danego osiągnięcia. Znane są jednak w historii nauki „przypadkowe odkrycia”, które pojawiały się nagle, intensywnie, a ich twórcy nie byli nawet świadomi wagi swoich odkryć, ponieważ bardzo często pracowali wówczas nad czymś zupełnie innym. Niemniej jednak każde odkrycie wymaga od twórcy dużej dozy energii, poświęcenia i skupienia. Rozwiązywanie zadań tekstowych wymaga dokładnie tego samego: energii, poświęcenia i skupienia, dlatego nauczyciele mogą tym sposobem rozbudzić kreatywne, ciekawe umysły młodych odkrywców. Nie jest to jednak łatwe zadanie, gdyż istnieje duże ryzyko zgaszenia uczniowskiego zapału poprzez sceptycyzm nauczyciela, stłumienia uczniowskiej energii poprzez rutynowe operacje i zatrącenie uczniowskiego poświęcenia poprzez wybieranie niewłaściwych zadań.

METODYKA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ TEKSTOWYCH

George Polya twierdził, że celem nauczania matematyki w szkole średniej powinno być nauczanie myślenia¹, a owe myślenie utożsamiał z rozwiązywaniem zadań tekstowych. Kwestia rozwiązywania zadań tekstowych i nauczania matematyki w tym zakresie dzieli się na dwa okresy – przed i po Poly². System edukacji w Polsce

stoi w obliczu wielkich zmian – w kontekście zarówno struktury systemu edukacji, jak i treści programowych i to właśnie sposoby rozumowania, argumentowania i myślenia matematycznego będą kluczową umiejętnością, w którą każdy nauczyciel będzie musiał wyposażać swoich uczniów. Dlatego też sposoby i techniki rozwiązywania zadań tekstowych, a w zasadzie sposoby i techniki, w jaki sposób uczyć rozwiązywania zadań tekstowych, powinny stać się niezbędnym narzędziem pracy w warsztacie nauczyciela.

Pierwsza zasada polyowskiej metodyki – „Zrozumienie zadania” – jest tak oczywista, że bardzo często nauczyciele pomijają ten etap analizy zadania. Tymczasem niezrozumienie treści rozważanego problemu, częściowe lub ogólne, jest, niestety, źródłem niepowodzeń uczniowskich podczas pracy nad zadaniem. W książce *Jak to rozwiązać?* Polya przedstawia listę przykładowych pytań i odpowiedzi, które mogą pomóc nauczycielowi przejść przez pierwszą fazę rozwiązywania zadań tekstowych: *Czy rozumiesz wszystkie sformułowania w rozważanym zadaniu? Co masz zrobić/pokazać/udowodnić? Czy potrafisz wypowiedzieć treść zadania i postawiony problem własnymi słowami? Co jest niewiadome, co jest dane? Jaki jest warunek? Zrób rysunek, wprowadź oznaczenia*³.

Dialog nauczyciela z uczniami powinien bezpośrednio wprowadzać w drugą zasadę metodyki rozwiązywania zadań tekstowych – „Układanie planu rozwiązania”. Niemalże każde zadanie można rozwiązać na kilka spo-

sobów i wybranie odpowiedniej drogi postępowania ma zasadnicze znaczenie. Umiejętność dobierania strategii można zdobyć jedynie poprzez rozwiązywanie dostatecznie dużej liczby zadań, potrafimy wówczas dostrzec pewne analogie, użyć podobnych metod dedukcyjnych, gdy rozwiązywaliśmy podobne zadanie wcześniej, łatwiej nam wykorzystać własne doświadczenie, jeśli doszliśmy do podobnych wniosków wcześniej.

„Wykonanie planu”, czyli trzecia zasada rozwiązywania zadań tekstowych, jest zazwyczaj łatwiejsza niż poprzednia. Jeśli uczniowie zrozumieli wcześniej zadanie i ułożyli dokładną strategię postępowania przy jego rozwiązaniu, nauczyciel może polegać na ich dociekliwości i gorliwości, zakładając, że posiadają niezbędne umiejętności. Uczniowie powinni być wytrwali w realizacji planu rozwiązania, a jeśli ten zawodzi, powinni próbować ułożyć następny plan przed przystąpieniem do bezcelowych obliczeń.

Ostatnią zasadą polyowskiej metodyki jest „Rzut oka wstecz”. Ten krok jest bardzo często pomijany, nie tylko przez uczniów, ale także przez nauczycieli. Opuszczana jest wówczas bardzo pouczająca faza szerokiego spojrzenia na postawiony problem. Czas na zebranie rozwiązania jednym chwytem myśli, przeanalizowanie, co było dobre, a co nie działało, pomoże w pewnym stopniu przewidywać strategię podczas rozwiązywania zadań w przyszłości.

Panuje powszechna opinia, że matematyka jest bardzo trudnym przedmiotem szkolnym, a przyczyn tego stwierdzenia można doszukiwać w abstrakcyjności matematycznych rozumowań i dedukcyjnej strukturze. Problem rozwiązywania zadań tekstowych był przedmiotem zainteresowań wielu dydaktyków matematyki, przy czym skupiali się oni głównie na uczniach szkoły podstawowej⁴⁻⁷. Metody i strategie rozwiązywania zadań tekstowych dla starszych uczniów pozostają takie same, uczniowie powinni mieć już wyrobione właściwe nawyki, jednak rzeczywistość w przypadku szkoły średniej pokazuje, że jest to błędne założenie. Istnieje wiele przyczyn pojawiających się trudności podczas rozwiązywania zadań tekstowych, takie jak słaba umiejętność czytania, rozumienia i analizy problemu. Uczniowie nie potrafili wykorzystywać wcześniej zdobytej wiedzy i nie są w stanie dostrzegać pojawiających się analogii, a powodem takiego stanu rzeczy może być czasami niewystarczająca wiedza merytoryczna w zakresie przedmiotu, ale bardzo często uczniowie po prostu nie potrafili wybrać odpowiedniej strategii i obrać właściwego toku rozumowania.

Każde zadanie tekstowe składa się z dwóch warstw i wymaga różnych aktywności matematycznych. Pierwszą warstwą jest tekst werbalny, który przedstawia pewną sytuację empiryczną, prawdziwą bądź wyobrażoną, którą Czytelnik musi zrozumieć i dokonać poprawnej analizy problemu. Prowadzi to bezpośrednio do drugiego etapu – warstwy matematycznej, która wymaga abstrakcyjnych aktywności związanych z właściwym przekształceniem informacji zawartych w warstwie werbalnej w matematyczny problem do rozwiązania. Rozwiązywanie zadań wymaga formułowania matematycznych wypowiedzi uwzględniających precyzyjny język matematyczny i jednoznaczność używanych pojęć. Stosowanie odpowiedniej terminologii wymusza zauważenie każdego niezbędnego szczegółu, stąd transfer

warstwy werbalnej w matematyczną jest trudnym i złożonym procesem i nie zawsze uczniowie są tego uczeni i do tego przygotowani. Metodyka rozwiązywania zadań tekstowych powinna być stosowana bardzo dokładnie i systematycznie, ponieważ taka forma nauczania – uczenia się matematyki prowadzi do dogłębnego rozumienia rozważanych treści i pozyskiwania nowych umiejętności. Co więcej, pomaga zrozumieć pewne metody matematycznych rozumowań, między innymi sens uogólniania czy stosowania analogii.

CHARAKTERYSTYKA EKSPERYMENTU – CASE STUDY

W niniejszym artykule przedstawiona zostanie pewna koncepcja sprawdzenia poprawności stosowania metodyki rozwiązywania zadań tekstowych. Przedstawione wyniki nie są generalizowane, są przypadkami pewnego case study, jednak wyznaczają zarys szerszego spojrzenia na analizę skuteczności nauczania rozwiązywania zadań tekstowych. W artykule będę posługiwać się określeniem „badania”, należy jednak pamiętać, że chodzi tu jedynie o przeprowadzoną kontrolę i obserwację procesu dydaktycznego.

Do badań zostali wybrani studenci matematyki II roku studiów I stopnia o specjalności nauczycielskiej. Studenci na zajęciach z podstaw dydaktyki zostali szczegółowo zapoznani z polyowską metodyką rozwiązywania zadań tekstowych, omówione zostały liczne przykłady jej zastosowania, a badani zostali uwrażliwieni na wagę i znaczenie zadawanych pytań oraz rolę dogłębnej analizy problemu przed przystąpieniem do rozwiązywania problemu, czyli wykonania wcześniej sprecyzowanego i przemyślanego planu. Ponadto badani studenci mieli pewne doświadczenia związane z pracą z uczniami, prowadzeniem lekcji matematyki, gdyż jednocześnie odbywali praktykę śródroczną w szkole podstawowej. Studenci prowadzili lekcje w szkole ćwiczeń, a następnie przeprowadzone przez nich zajęcia poddawane były dokładnej analizie pod względem poprawności merytorycznej, stylistycznej i wychowawczej. Badana grupa studentów liczyła 8 osób.

Eksperyment polegał na rozwiązaniu przez studentów otrzymanych zadań tekstowych na tablicy, pracując z resztą grupy tak jak z uczniami w szkole, uwzględniając polyowską metodykę rozwiązywania zadań tekstowych. Studenci otrzymali zadania wcześniej, mieli czas na samodzielne ich rozwiązanie, ułożenie konspektu pracy „pod tablicą”, pracy „z klasą”. Każdy student znał tylko swoje zadania, nikt nie wiedział, jakie zadania mają koledzy i koleżanki. Opisywana koncepcja miała być pewnego rodzaju kontrolą przyswojenia treści programowych, jednak wyniki tej kontroli oraz obserwacje prowadzone podczas tego eksperymentu stały się na tyle ciekawe i zaskakujące, że wyłoniły pewien kierunek badań, które mogą zostać przeprowadzone na szerszą skalę, a wnioski, które powstaną po ich analizie, mogą nabrać znaczenia w kontekście nauczania rozwiązywania zadań tekstowych.

PREZENTACJA ZADANIA

W niniejszej pracy zostanie omówione szczegółowo jedno zadanie, na podstawie którego przedstawione zostaną pewne hipotezy i wskazania do kierunku dalszych badań. Omawiane

zadanie pojawiło się na maturze z matematyki w zakresie rozszerzonym w 2018 roku. Dotyczy ono rachunku prawdopodobieństwa i wymaga znajomości podstawowych wzorów kombinatorycznych i klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Zadanie jest następującej treści:

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Przykładowe rozwiązania problemu:

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje zbioru ośmioelementowego, liczba wszystkich zdarzeń elementarnych wynosi $\Omega = 8!$. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Przedstawione zostaną dwa sposoby obliczania wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A .

I sposób – ustalenie pozycji dla liczb parzystych (E – liczba parzysta).

Istnieje 20 przypadków rozmieszczenia liczb parzystych (ryc. 1), ponadto liczby parzyste możemy ustawić na $3!$ sposobów, a nieparzyste permutują na $5!$ sposobów. Stąd:

$$|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!.$$

II sposób – W rozważanym zbiorze jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić na $5!$ sposobów. Otrzymamy wówczas (O – nieparzysta liczba):

(1)	O	(2)	O	(3)	O	(4)	O	(5)	O	(6)
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Miejsca (1) – (6) to pozycje, na których możemy postawić liczbę parzystą (z jednej lub drugiej strony liczby nieparzystej). Wybieramy trzy miejsca, na których postawimy liczby

parzyste, możemy to zrobić na $\binom{6}{3}$ sposobów.

E		E		E					E		E		E		
E		E			E				E		E			E	
E		E				E			E		E				E
E		E					E		E			E		E	
E			E		E				E			E			E
E			E			E			E				E		E
E				E			E			E		E		E	
E					E			E			E			E	E
E						E		E			E		E		E

Ryc. 1

Liczby parzyste permutują na $3!$ sposoby, więc:

$$|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!.$$

Wystarczy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A , korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{20 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{5}{14}.$$

WYNIKI ROZWAŻANEGO CASE STUDY

Student, którego zadaniem było rozwiązanie powyższego zadania z grupą, miał ułożony pełen scenariusz pracy, zaplanował przykładową listę pytań do każdego z IV etapów polyowskiej metody rozwiązywania zadań tekstowych.

Pierwszym niepokojącym sygnałem było pytanie studenta, czy może od razu „przejsć” do omawiania sposobu rozwiązania II metodą, gdyż wypisywanie tych wszystkich przypadków wg I metody jest żmudne i czasochłonne. Na pytanie: *Czy tak właśnie rozpoczął Pan pracę nad tym zadaniem? Czy to była pierwsza myśl, pierwszy pomysł na rozwiązanie?* student odpowiedział: *Oczywiście, że nie, zacząłem od wypisywania możliwości (...).* Student nie zdawał sobie sprawy z błędu dydaktycznego, który zamierzał popełnić – widział pozorną trudność (zawiłe i czasochłonne wypisywanie przypadków), więc nie chciał „zagłębiać” się w to z uczniami. Taka postawa nauczyciela w klasie jest nie do przyjęcia. Gdyby student zaczął sprowadzać rozważane zadanie do rozwiązania tylko II metodą, cała analiza problemu i cała droga do otrzymania pożądanego wyniku byłaby sztuczna i pobudziła w uczniach poczucie bezradności w obliczu problemu, nieumiejętność radzenia sobie z sytuacją przedstawioną w zadaniu. Uczniowie, oczywiście, zrozumieliby metodę i sposób rozwiązania, ale brak obycia w danym zakresie, zbyt małe doświadczenie w stosowaniu matematycznych „sztuczek” i nietypowych sposobach rozumowania podważyłaby ich pewność siebie i wiarę we własne możliwości, a może nawet zniechęciłaby ich do dalszej pracy. Uczeń musi mieć świadomość, że do rozwiązania dochodzi sam, że nawet bez pomocy nauczyciela potrafiłby w jakiś sposób rozwiązać zadanie, przynajmniej częściowo. Obowiązkiem nauczyciela jest tak sterować uczniem, właśnie poprzez

zadawanie odpowiednich pytań, że zostawia go z poczuciem spełnienia w zakresie danego problemu, że uczeń pozostaje w przeświadczeniu, że doszedł do rozwiązania sam.

Po głębokiej analizie dydaktycznej wartości i struktury rozważanego zadania student zrozumiał wagę i rolę dojścia do rozwiązania I metodą. W trakcie zajęć rozpoczął omawianie zadania z grupą studentów, poprawnie uwzględniając polyowską metodykę podejścia do problemu, stosując odpowiednią gradację pytań w zależności od reakcji grupy. Wszystkie etapy pracy z grupą zostały uprzednio dokładnie omówione z prowadzącym eksperyment.

W I etapie pracy („zrozumienie zadania”) student, stosując krótką listę pytań, uzyskał pożądane rezultaty:

- *Czego dotyczy zadanie?*
- *Od czego zazwyczaj rozpoczynamy rozwiązywanie zadań z rachunku prawdopodobieństwa?*
- *Czy rozumiemy, na czym polega zdarzenie elementarne przedstawione w zadaniu?*

Analiza zadania wyłoniła istotę problemu. Ustalona została kolejność pracy i najważniejsze jej etapy – znalezienie przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych i opisanie zdarzenia wskazanego w zadaniu. Na tym etapie pracy uczeń nie musi wiedzieć, jakie konkretne zdarzenia elementarne sprzyjają zajściu rozpatrywanego w zadaniu zdarzenia, jednak powinien umieć opowiedzieć własnymi słowami, na czym dane zdarzenie polega.

II etap pracy służył ułożeniu planu rozwiązania i w danym zadaniu skupiono się na wskazanym zdarzeniu – polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie stoją koło siebie. Istotnie, zostało powiedziane, że najpierw należy policzyć przestrzeń wszystkich zdarzeń elementarnych, ale tutaj nikt nie miał wątpliwości, że to nie będzie stanowiło trudności, to zwykle permutacje zbioru 8–elementowego. Ułożenie koncepcji podejścia do problemu i znalezienie sposobu obliczenia mocy zdarzenia, czyli przejście do III etapu pracy – czyli wykonania planu – owocowało burzliwą dyskusją, a student, który był odpowiedzialny za poprowadzenie pracy, narzucał swoją interpretację zbyt szybko i zbyt natrączywie. Taka sytuacja nie powinna mieć miejsca w szkole. Dyskusja rozpoczęła się pytaniem:

- *W jaki sposób znajdziemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu naszego zdarzenia?*
- *Zacniemy wypisywać.*
- *W jaki sposób będziemy to robić?*
- *Mamy trzy liczby parzyste i pięć liczb nieparzystych. Niech na przykład na pierwszym miejscu stoi liczba 2, na trzecim 4 (...).*
- *Rozgraniczanie na poszczególne liczby parzyste jest przecież bez sensu, skupmy się tylko na liczbach parzystych i nieparzystych, oznaczmy je P i N (...).*

Powyższy komentarz pozbawił uczniów bardzo pouczającej analizy rozważanego problemu, mianowicie samodzielnego zauważenia analogii w przypadkach, gdy liczby P i N permutują. Nauczyciel powinien pozwolić wypisać kilka konkretnych zdarzeń uczniowi i zacząć pomagać pytaniami dopiero wówczas, gdy uczeń sam nie potrafiłby dostrzec wspomnianej analogii. Powinny wtedy pojawić się pytania typu:

- *Czy nie możemy tych konkretnych przypadków jakoś uogólnić?*
- *Czy nie możemy tego rozumowania zawęzić?*

- *Spójrz na elementy naszego ciągu, czy nie możemy ich jakoś kategoryzować na analogiczne przypadki?*

Uczeń powinien mieć poczucie, że doszedł sam do tego, że wystarczy wypisać przypadki na liczby parzyste i nieparzyste, bo te między sobą tylko permutują. Gotowa metoda zliczania tych zdarzeń, podana z zewnątrz, bez własnej analizy rozpatrywanych przypadków, nie zostanie przez ucznia przyswojona w sposób prawidłowy, a zrozumienie zadania będzie tylko powierzchowne.

Na omawianych zajęciach, gdy student „narzucił” metodę wypisywania przypadków, uczniowie zaczęli na tablicy rozpisywać przypadki, jednak dość chaotycznie. Prowadzący powinien zadbać o to, by wprowadzić pewien porządek wypisywania tych przypadków, ustalić określoną strategię, po to, by żadne zdarzenie elementarne nie zostało pominięte i żeby całe zdarzenie można było objąć jednym chwytem myśli.

Po wypisaniu kilku (kilkunastu) przypadków na tablicy i po chaotycznych próbach znalezienia tych kombinacji, których brakuje, prowadzący zorientował się, że będzie trudno wyszukać i wypisać wszystkie przypadki, więc zakończył próby uczniów komentarzem:

- *Widzicie już, w jaki sposób musimy tworzyć kolejne przypadki, w domu każdy samodzielnie wypisze je wszystkie i obliczy prawdopodobieństwo naszego zdarzenia (...).*

Student, a przyszły nauczyciel, nie zdawał sobie w tamtym momencie sprawy z tego, że uczniowie właśnie nie widzą, w jaki sposób dane przypadki są tworzone i jak wypisać je wszystkie. Nauczyciel, który nie rozumie pozytywnych aspektów powstałych na skutek błędów popełnianych przez niedoświadczonych uczniów, nauczyciel, który nie dostrzega efektów kształcenia wynikających z analizy błędów, kończy rozważania danego problemu w momencie, w którym tak naprawdę dopiero otwierają się możliwości dogłębnego poznania i zrozumienia istoty problemu. W nauczaniu matematyki bardzo ważna jest pewnego rodzaju profilaktyka błędów, która – wcielona do praktyki szkolnej – pomogłaby uchronić zarówno uczniów, jak i nauczycieli przed pogłębianiem i rozprzestrzenianiem się błędnych rozumowań. Krygowska mówi nawet o tak zwanym „błogosławionym błędzie”, który, jeśli uzewnętrznili się dostatecznie wcześnie, to można, a nawet trzeba wykorzystać dla postępu⁸. W omawianym zadaniu to chaotyczne wypisywanie przypadków przez uczniów, które nie wyodrębniło żadnej drogi rozwiązania, nie dało nawet obrazu na temat liczby tych wszystkich przypadków, było doskonałym wprowadzeniem do ustalenia pewnej strategii:

- *Spójrzcie, takie wypisywanie do niczego nas nie doprowadziło. Dalej nie wiemy, ile jeszcze tych przypadków zostało. Wiemy, czego szukać, ale jeszcze nie wiemy, jak. Spróbujmy ustalić pewną strategię, pewien schemat odnajdywania tych przypadków. Czy coś proponujecie?*

Bezpośrednio po opisywanych zajęciach prowadzący student, zapytany o powody swoich decyzji – zaniechania dalszych prób rozwiązania, porzucenia drogi prowadzącej do rozwiązania, tłumaczył, że nie chciał „przyznawać się” przed grupą, że takie rozumowanie jest chaotyczne. Wiedział, że dalsze wypisywanie wszystkich dwudziestu przypadków byłoby bardzo żmudne i czasochłonne, a on chciał przecież pokazać drugą metodę rozwiązania. Wypowiedź studenta jest istotna z kilku względów.

Po pierwsze, niedoświadczony nauczyciel w ogóle nie bierze pod uwagę możliwości pokazania własnej pomyłki przed klasą, uznając, że to świadczy o jego słabości. Młody nauczyciel musi umieć przyznać się do błędów, zauważać je i czerpać z nich, w końcu *errando discimus* – błędząc, uczymy się.

Po drugie, student, uświadamiając sobie potencjalne zagrożenie wynikające z kontynuowania rozwiązywania problemu, po prostu go zaniechał. Zachowanie tego typu, celowe pomijanie pewnych sytuacji, w których uczeń mógłby popełnić błąd, czyli pewnego rodzaju droga na skróty, nazywana jest przez Krygowską „blokadą błędu”⁹. Nauczyciel nie musi wówczas stawiać w obliczu nieporozumień i wyjaśniać istoty popełnionego błędu.

Po trzecie, student zakończył rozwiązywanie zadania I metodą bez uzyskania wyniku, aby pokazać uczniom „lepszą” metodę – lepszą, bo szybszą, w jego odczuciu. Z dydaktycznego punktu widzenia jest to w takim momencie sytuacja bez żadnej wartości kształcącej. Uczniowie próbowali rozwiązać zadanie metodą, którą rozumieli, ale która zawiodła, na rzecz metody, która została im podana w gotowej postaci. Pokazana metoda jest skuteczna, uczniowie ją rozumieli, jednak działa demobilizująco na poczucie własnej wartości i świadomości matematycznej.

Po analizie błędów powstałych podczas omawiania rozważanego zadania z grupą student nie potrafił wytłumaczyć powodów swojego postępowania, które – mimo dobrze przygotowanego konspektu – potoczyło się własnym torem. Student zrozumiał jednak niedociągnięcia i pomyłki, które popełnił. Stwierdził również, że nie zdawał sobie sprawy, że tak to może wyglądać i że tak trudno poprowadzić grupę słuchaczy właściwą ścieżką rozwiązania, nie narzucając własnej drogi, a prowadzić za rękę podczas matematycznej przygody.

PODSUMOWANIE

Wszystkie opisane w niniejszym artykule działania skupiają się na nauczycielu, to on powinien starać się przewidywać uczniowskie błędy, powinien umieć dostrzec pojawiający się „błogosławiony błąd” i to na nim skupia się obowiązek wybierania odpowiednich zadań na lekcję. Nauczyciel również jednak popełnia wiele błędów, a ich przyczyny są różnorodne i mogą być zakorzenione już w podstawach edukacji nauczyciela, mogą jednak wywodzić się po prostu z nieprawidłowej postawy nauczyciela i jego braku aktywnego udziału w procesie nauczania.

Na temat kształcenia nauczycieli matematyki, w szczególności na temat błędów w tym kształceniu, w wywiadzie przeprowadzonym i opublikowanym przez L. Jastrzębską, wypowiada się M. Sitek, wicedyrektor Instytutu Badań Edukacyjnych, kierownik badań TEDS (Teacher Education and Development Study in Mathematics): *Kształcimy bardzo dużo nauczycieli, a jednocześnie nie dbamy o jakość tego kształcenia. I dodaje: Nauczanie matematyki często jest przeteoretyzowane, istnieje ambicja, że absolwent studiów matematycznych jest przede wszystkim dobrym matematykiem. (...) Wiedza z zakresu dydaktyki matematyki nie tylko odstawała od wiedzy teoretycznej, ale też brakowało warsztatu nauczycielskiego w indywidualnym podejściu do ucznia, choćby umiejętności, jak wytłumaczyć uczniowi, na czym polega jego błąd, jakie są inne sposoby rozwiązywania zadania*¹⁰.

Jest to bardzo poważny zarzut, jednak zdarzają się, niestety, takie sytuacje, że młody nauczyciel, przyzwyczajony na studiach do formy wykładu, powiela ten schemat w szkole, nie zdając sobie sprawy, jak bardzo krzywdzi swoich uczniów.

Nauczyciel, który nie potrafi w sposób poprawny analizować zadania matematycznego w klasie, nie będzie potrafił wykształcić twórczej postawy u swoich uczniów, niezbędnej na drodze matematycznego poznania. Prezentując własny tok rozumowania, choćby najbardziej zrozumiały i naukowo wartościowy, nie osiągniemy satysfakcjonujących efektów kształcenia, gdyż przekazana wiedza nie będzie trwała. Nie nauczymy się jeździć na rowerze, gdy jedyne, co robimy, to patrzymy na kogoś, kto jeździ. Ktoś musi nas odpowiednio poinstruować, kazać nam wsiąść na rower, powiedzieć, jak się pedałuje, i pozwolić nam na samodzielne próby. Ktoś może podpowiedzieć, w jaki sposób trzymać równowagę, ale nikt nie robi tego za nas. Ktoś powinien pomóc nam się podnieść, gdy nie umiemy sami wstać, wskazać i omówić błąd, który popełniliśmy, byśmy mogli spróbować jeszcze raz, ucząc się i wykorzystując każdą małą porażkę.

Bibliografia:

1. Polya G., *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*, 2 volumes combined, 1981 ed., John Wiley and Sons 1965.
2. Schoenfeld A.H., *A Brief and Biased History of Problem Solving* [w:] Curcio F.R. (red.), *Teaching and Learning: A Problem-solving Focus*, Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics 1987, s. 27–46.
3. Polya G., *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, 2004 ed., Princeton University Press 1945.
4. Ciosek M., *Dydaktyczne problemy związane ze strategiami rozwiązywania zadań matematycznych*, „Rocznik Nauk.-Dydakt.”, nr 67, „Prace z Dydaktyki Matematyki” 2/1984.
5. Legutko M., *Uczenie rozwiązywania zadań na lekcjach matematyki*, „Dydaktyka Matematyki” 11/1989.
6. Siwek H., *Przedłużanie zadań*, „Oświata i Wychowanie” Wersja B, 7/1984.
7. Trelński G., *Jak rozwiązać zadanie*, „Oświata i Wychowanie” Wersja B, 7/1984.
8. Krygowska Z., *Zrozumieć błąd w matematyce*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego” Seria V, „Dydaktyka Matematyki” 10/1989.
9. Krygowska Z., *O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry*, Przedruk z: „Matematyka” 4/1955 [w:] Żabowski J. (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. I, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2003.
10. Jastrzębska L., *Kształcimy wielu, nie patrzymy na jakość*, Wywiad z M. Sitekiem, „EduFakty” 24.10.2010.
11. Klakla M., *Gotowa wiedza i aktywność w matematycznym kształceniu na przykładzie kątów Langleya*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2006.

dr Sylwia Kania

Pracownik naukowo-dydaktyczny w Instytucie Matematyki na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach, nauczyciel w liceum ogólnokształcącym w Sławkowie, egzaminator maturalny. Zainteresowania naukowe: rozpoznawanie i rozwijanie uzdolnień matematycznych uczniów, trudności studentów i uczniów w rozumieniu pojęć matematycznych, modernizacja procesu nauczania matematyki na różnych poziomach kształcenia.

AUTOR: MACIEJ NOWAKOWSKI

MAGICZNE LICZBY ZESPOLONE

Edukacja matematyki w szkole średniej kończy się na zbiorze liczb rzeczywistych. Prawdziwa przygoda zaczyna się w momencie, kiedy odkrywamy, że można pierwiastkować liczby ujemne. Mówimy wtedy o liczbach zespolonych i w tym artykule chciałbym je przedstawić.

Każdy bardzo dobrze wie, że nie istnieje pierwiastek z liczby ujemnej. Ale czy kiedyś, drogi Czytelniku, sprawdziłeś to? Czy nigdy nie możemy uznać takiego pierwiastka? W szkole uczymy się o liczbach rzeczywistych, pośród których poznajemy, oprócz znanych nam liczb naturalnych, całkowitych i ułamków (wymiernych), także takie twory jak $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ itd. Poznajemy też liczbę bardzo związaną z kołem, o nazwie π . Te liczby tworzące jeden zbiór noszą nazwę liczb rzeczywistych. Rzeczywiście, w tym zbiorze nie istnieją pierwiastki z liczb ujemnych. A w jakim zbiorze istnieją? Taki zbiór nosi nazwę zbioru liczb zespolonych. Ale zaczniemy od początku.

Już na początku naszej ery Heron z Aleksandrii, bawiąc się figurami i bryłami geometrycznymi, tworzył figury, które nie miały prawa istnieć w naszej rzeczywistości, ponieważ miały ujemną wysokość (ryc. 1).

Niestety, nie przywiązywał do tego zbyt dużej uwagi i odkrycie liczb zespolonych odsunęło się w czasie. Kolejnym Grekiem, który miał szansę zapisać się w historii matematyki złotymi głoskami jako odkrywca liczb zespolonych, był Diofantos. Diofantos zasłynął z tak zwanych równań diofantycznych (równania, których pierwiastków szukamy w zbiorze liczb całkowitych). Zajmując się trójkątami prostokątnymi, otał się o liczby zespolone. Postanowił rozwiązać zadanie przedstawione na ryc. 2.

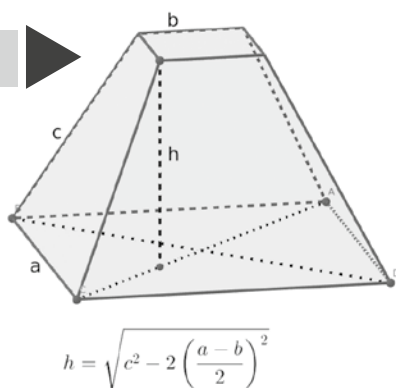
Problem polega na tym, że nie ma tu rozwiązań, chyba że zespolone. Sprawdźmy:

Łatwo sprowadzić powyższe rozwiązanie do następującego równania:

$$84x^2 - 43x + 6 = 0$$

Gdy policzymy deltę, odkryjemy, że jest ona ujemna i wynosi -167 . W jakiej sytuacji delta jest ujemna? W szkole mówi się, że nie ma rozwiązań, czy na pewno?

Ryc. 1



Dla $a = 9, b = 2, c = 10 \rightarrow h = 7$

Dla $a = 28, b = 4, c = 15 \rightarrow h = -\sqrt{63}$

Znaleźć boki trójkąta prostokątnego

$$P = 7j^2$$

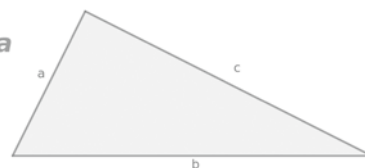
$$Obw = 12j$$

Rozwiązanie Diofantosa

$$a \cdot b = 14j^2$$

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12j$$

$$a = \frac{1}{x}, b = 14x$$



Ryc. 2

Na długi czas matematycy przestali zajmować się tymi dziwnymi rozwiązaniami. Doszło nawet do tego, że w 850 r. n.e. hinduski matematyk Machaviracharya napisał w *Ganita-sara-samgraha* (kompilum istoty matematyki), że nie wolno zajmować się pierwiastkami z liczb ujemnych.

Na szczęście, niektórzy nie zastosowali się do tego zakazu. W 1545 roku Girolamo Cardano postawił następujący problem (w istocie zbliżony do problemu Diofantosa):

Podzielić 10 na dwie części, których iloczyn wynosi 40.

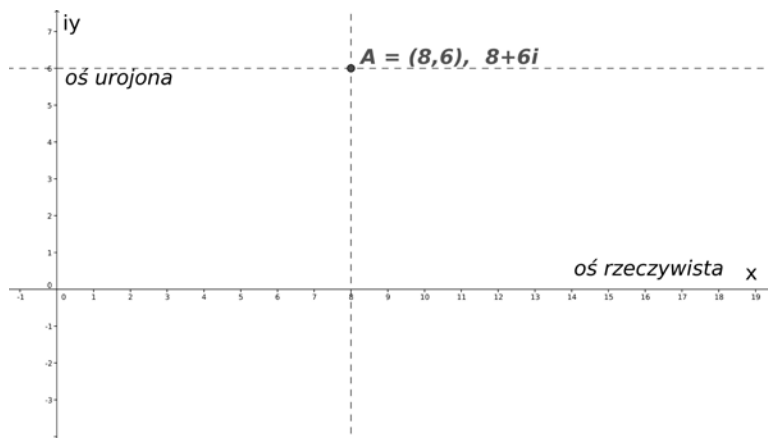
Wynikiem okazały się następujące dwie liczby:

$$5 - \sqrt{-15} \text{ i } 5 + \sqrt{-15}$$

Długo torowały sobie drogę liczby zespolone do uznania ich za obiekt badań matematycznych. W 1572 r. w książce pod tytułem *Algebra* Rafael Bombelli umieścił liczbę $-\sqrt{-1}$, a w 1629 r. Albert Girard wprowadził nazwę niemożliwe rozwiązania dla następującego zapisu liczbowego:

$$a + \sqrt{-b}$$

Kartezjusz w 1637 r. nazwał te liczby urojonymi lub wymyślonymi. Mimo że w 1777 roku pojawił się symbol dla $-\sqrt{-1}$, wprowadzony przez wybitnego matematyka, Leonarda Eulera, pod postacią literki i , to teoria liczb zespolonych zaczęła się rozwijać po uzyskaniu geometrycznej interpretacji. Genialne w swojej prostocie rozwiązanie podał Caspar Wessel w 1799 roku, wprowadzając płaszczyznę zespoloną (ryc. 3).

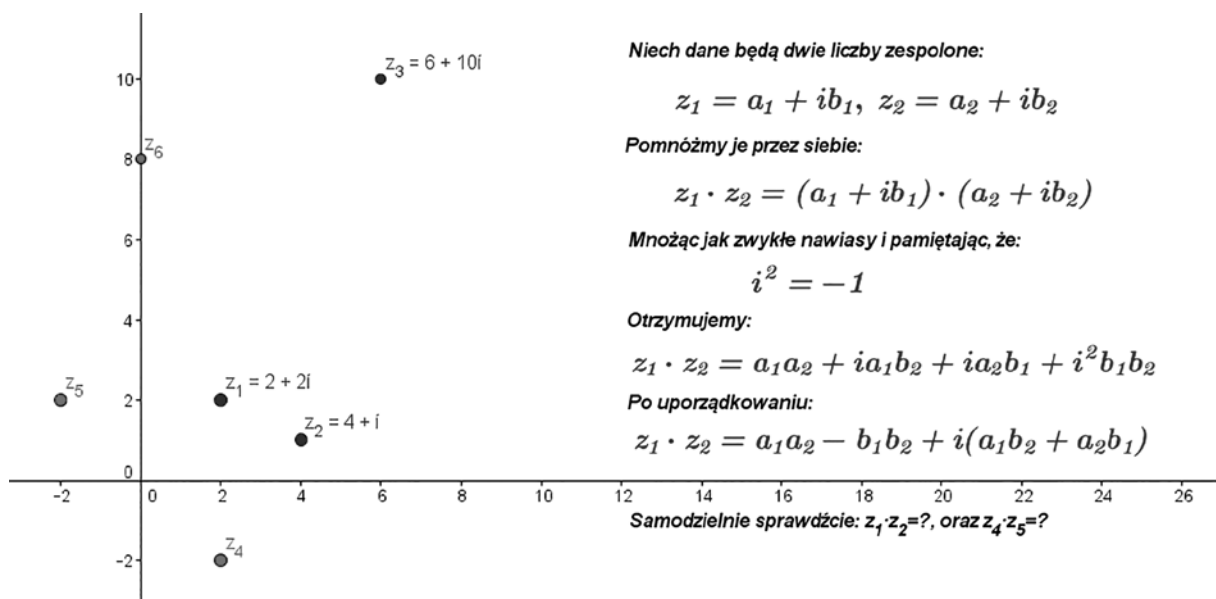


Ryc. 3

Jak wynika z rysunku, wprowadzenie tej płaszczyzny (czasem nazywanej diagramem Arganda) umożliwiło w prosty sposób rozwój badań tych liczb. My skupimy się tylko na kilku prostych właściwościach. Zapiszmy przede wszystkim liczbę zespoloną w następujący sposób:

$$Z = a + bi$$

i – pamiętając, że $i^2 = -1$ – wprowadźmy podstawowe działania (ryc. 4).



Niech dane będą dwie liczby zespolone:

$$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$$

Pomnóżmy je przez siebie:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$$

Mnożąc jak zwykle nawiasy i pamiętając, że:

$$i^2 = -1$$

Otrzymujemy:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 + i^2 b_1 b_2$$

Po uporządkowaniu:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Samodzielnie sprawdźcie: $z_1 \cdot z_2 = ?$, oraz $z_4 \cdot z_5 = ?$

Ryc. 4

Zobaczmy, że działania na nich nie różnią się od zwykłych działań wprowadzanych w szkole. Troszkę trudniej może być z dzieleniem, ale wykorzystamy tu operację „usuwania niewymierności z mianownika”, czyli tzw. mnożenie przez sprzężenie (ryc. 5).

Wiemy już, że istnieją pierwiastki z liczb ujemnych. Spróbujmy je najpierw zapisać... Zaczniemy od liczby -1 . Zastanówmy się, jakie dwie takie same liczby trzeba pomnożyć przez siebie, żeby otrzymać -1 . Możemy dać tylko jedną $-i$ to dziwną – odpowiedź: jest to i lub $-i$. Zobaczmy inne liczby:

$$\sqrt{-4}, \sqrt{-5}, \sqrt{-9} \text{ itd.}$$

Spróbujmy zapisać to inaczej:

$$\sqrt{-4} = 2i, \sqrt{-5} = \sqrt{5}i, \sqrt{-9} = 3i \text{ itd.}$$

Wykonajmy podstawowe działania:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = z_3$$

- **dodawanie** – pogrupujmy teraz podobne ze sobą i... otrzymaliśmy nową liczbę zespoloną,

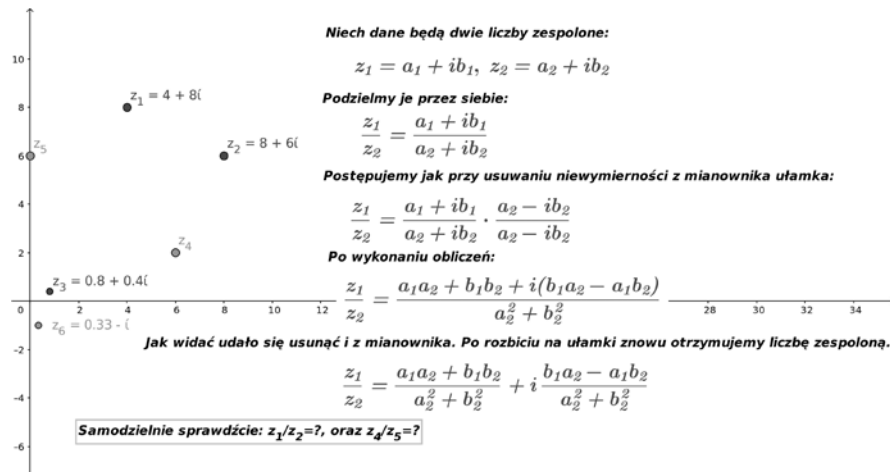
$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1i + a_2 + b_2i$$

- **odejmowanie** – możemy wykonać analogicznie jak dodawanie i otrzymujemy:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

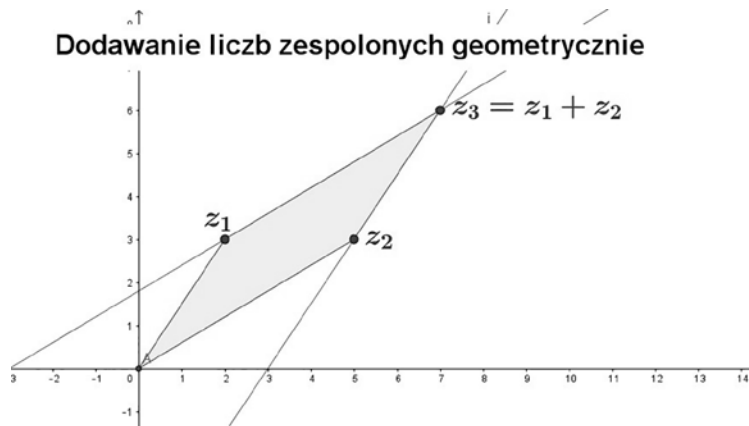
Zobaczmy, jak te operacje wyglądają na płaszczyźnie Wessela (ryc. 6 i 7).

Czytelnik, który spotkał się już z rachunkiem wektorowym, od razu rozpozna, że liczby zespolone dodajemy i mnożymy ze sobą tak samo jak wektory. Ma to duże znaczenie w fizyce teoretycznej.

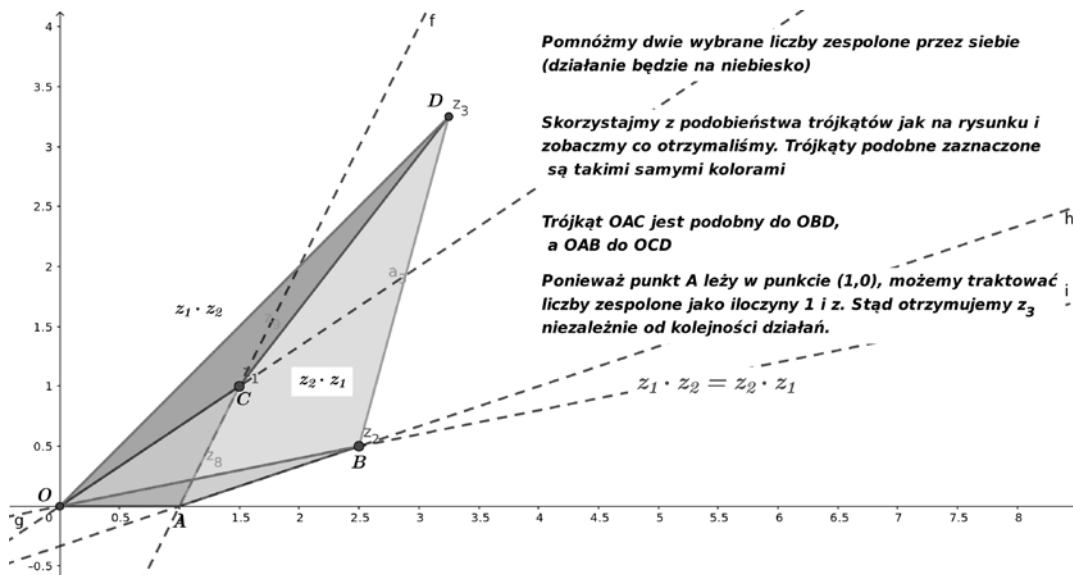


Ryc. 5

Dodawanie liczb zespolonych geometrycznie

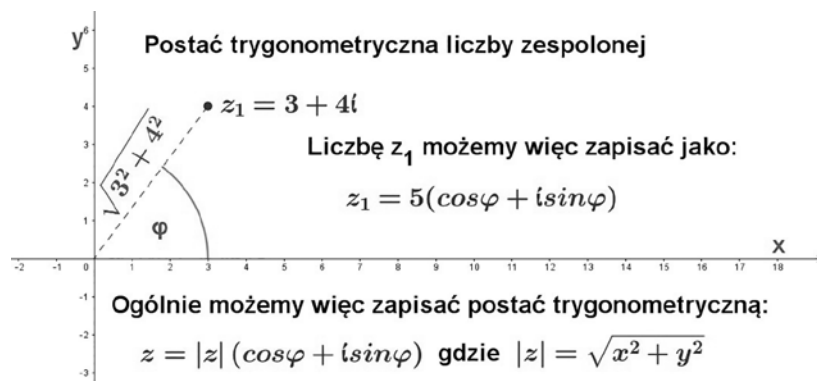


Ryc. 6



Ryc. 7

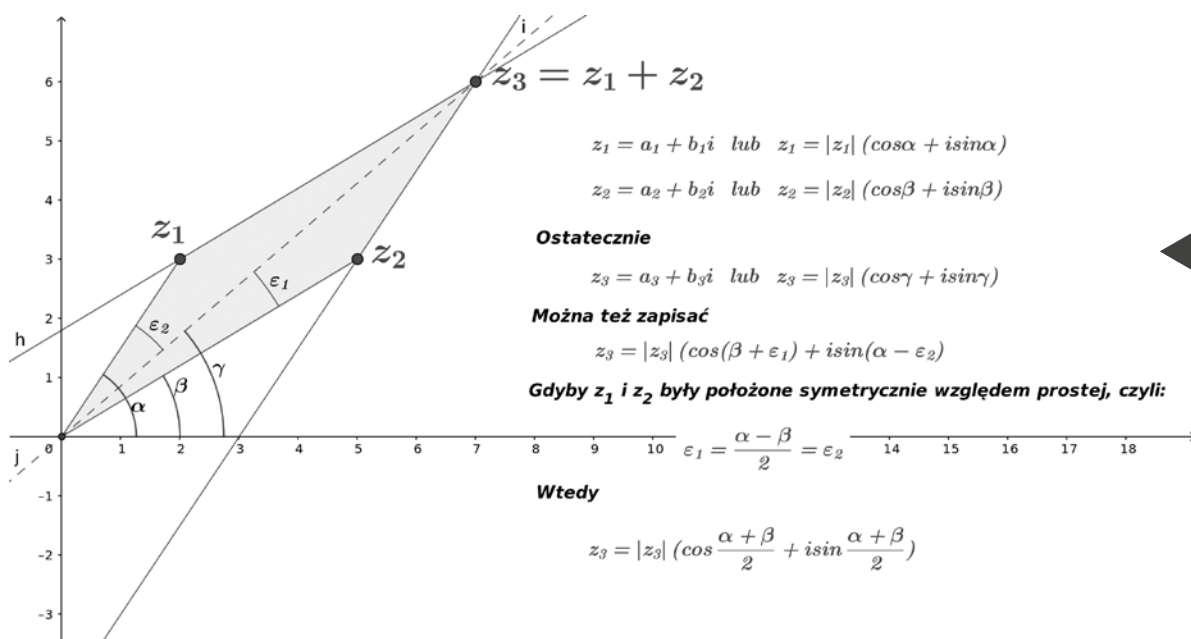
Korzystając z diagramu Arganda, możemy odkryć inną postać liczby zespolonej, bardzo przydatną, zwaną postacią trygonometryczną (ryc. 8).



Ryc. 8

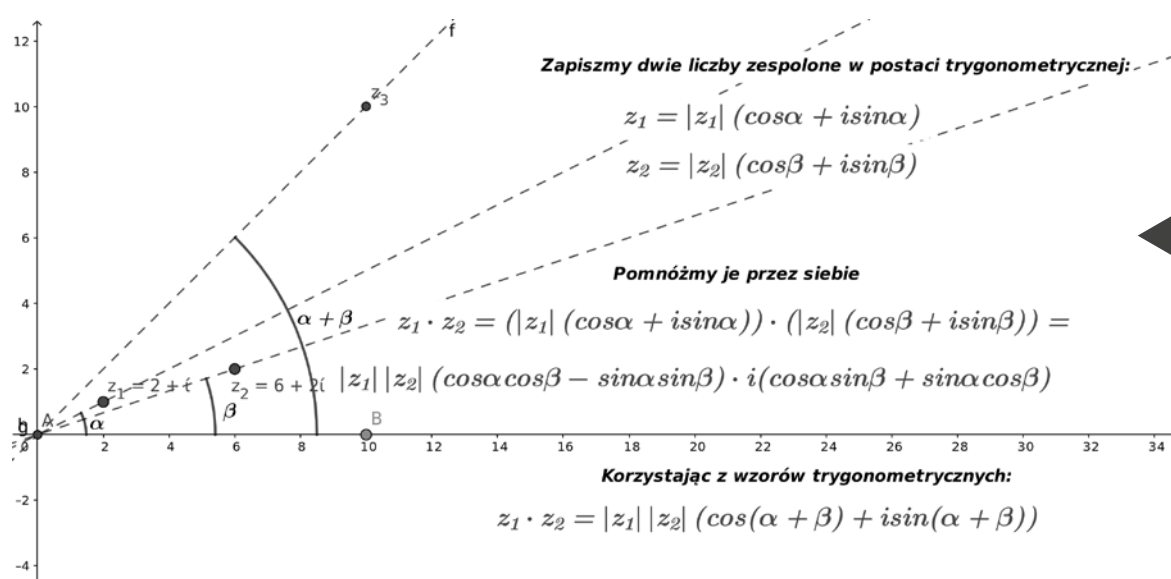
Wykorzystując tę postać, można odkryć kolejne ciekawe właściwości liczb zespolonych:

1. Dodawanie



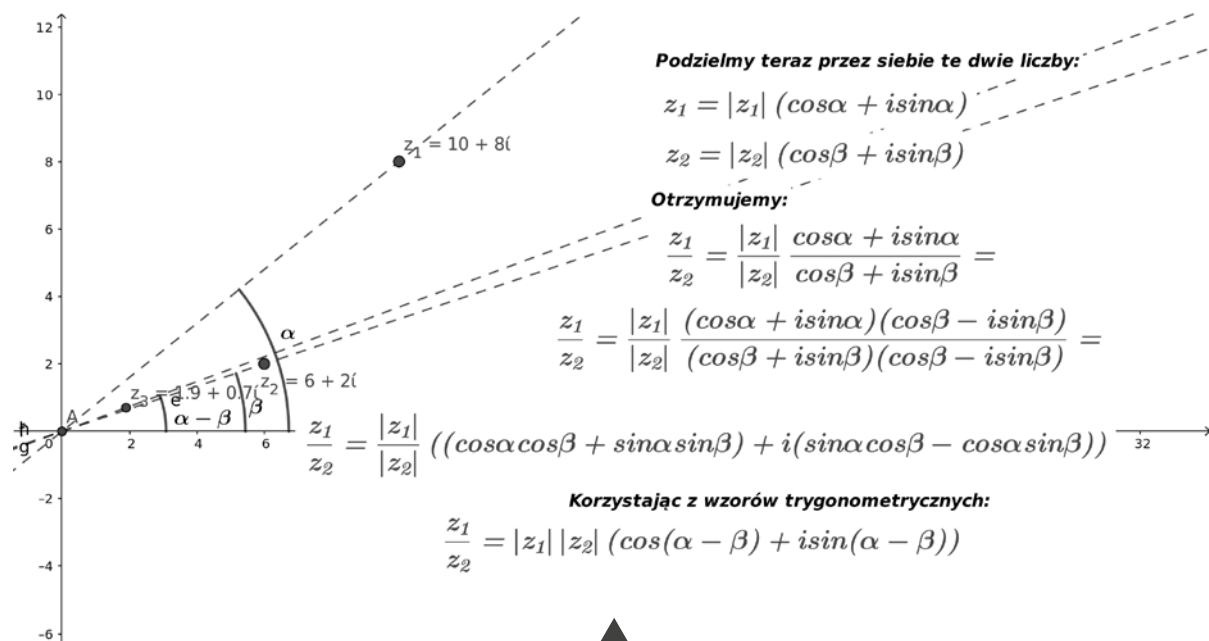
Ryc. 9

2. Mnożenie



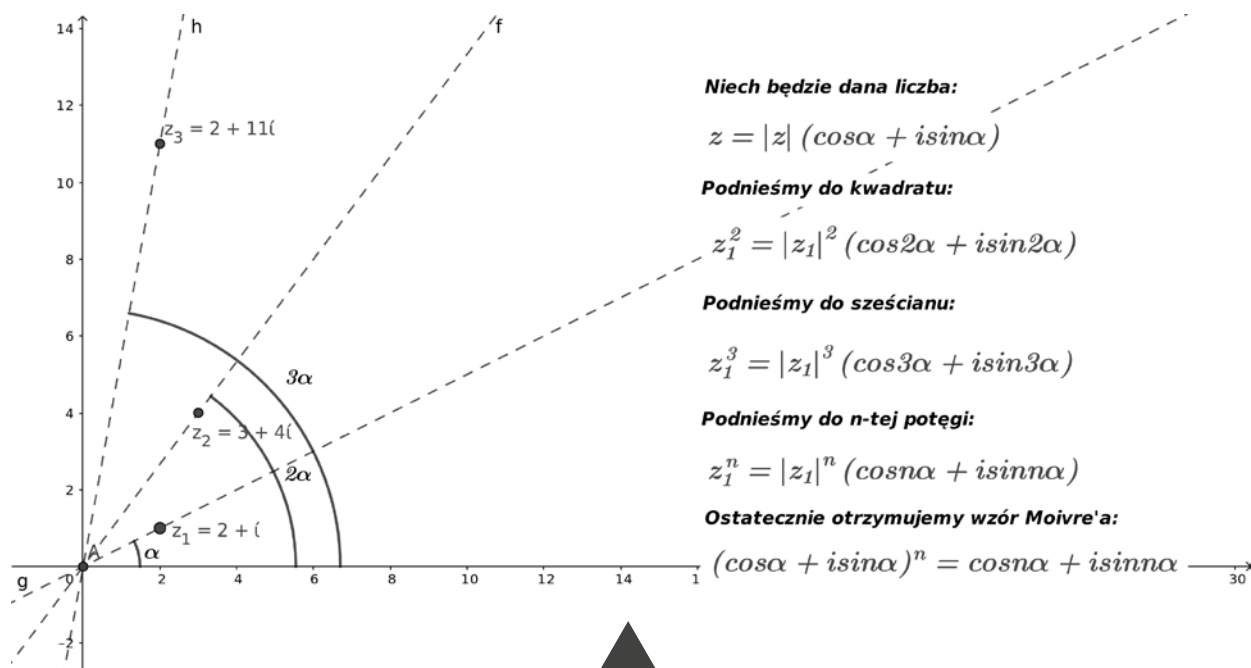
Ryc. 10

3. Dzielenie



Ryc. 11

4. Potęgowanie



Ryc. 12

Jak widać, liczby zespolone wnoszą bardzo dużo do naszego rozumienia rzeczywistości. Są całe działy matematyki im poświęcone, takie jak analiza zespolona. Są one niezmiernie przydatne w fizyce i chemii, ale o tym może innym razem.

mgr inż. Maciej Nowakowski

Nauczyciel matematyki, fizyki i chemii w CKZiU
w Łodzi. Popularyzator matematyki i fizyki.

AUTOR: ADAM MORAWIEC

MATEMATYKA W BIEGU

– LIST Z WAKACJI

Tak oto dobiegaliśmy do początku kolejnego roku szkolnego. Przed nami zatem znów obowiązki szkolne, tak lekcyjne, jak i te pozalekcyjne; w szczególności zajęcia koła matematycznego. Za nami wakacje – czas wolny, odpoczynek, kanikuła... Jak zwykle, ów czas wolny skończył się o wiele za szybko, być może więc w czasie wakacji nie całkiem powinniśmy ulegać wakacyjnemu nastrojowi, nawet jeżeli obiektywne okoliczności „spiskują” przeciw nam, odbierając nam tak czas (Mistrzostwa Świata w piłce nożnej), jak i ochotę (nieznośny upał) na jakikolwiek poważniejszy wysiłek intelektualny. Zapewne jednak pomimo tych niesprzyjających okoliczności niektórzy z nas trafili na jakąś imprezę wakacyjną typu kolonie, na której trzeba było wziąć udział w organizowaniu czasu młodemu uczestnikom tejże imprezy. Jednak wakacje (i kolonie) rządzą się swoimi prawami, należy więc się spodziewać, że dzieci będą chciały robić na nich wszystko, tylko nie zajmować się matematyką czy jakimkolwiek innym przedmiotem szkolnym: będą wołały raczej opałać się, kapać, grać w piłkę, biegać..., czyli robić klasyczne „nic”.

Zatem, jako nauczyciele matematyki, biorąc udział w takich imprezach, moglibyśmy się spodziewać, że my również będziemy mieć raczej wolne od nauczania i niespecjalnie będziemy angażowani w organizację jakichkolwiek zajęć. Przecież w programie zajęć wakacyjnych niewątpliwą przewagę nad innymi ich rodzajami mają zajęcia typu „wychowanie fizyczne”. Gdzie tu miejsce na matematykę? Nie widać... Hura, rzeczywiście powinniśmy mieć wolne. A jednak... we współczesnym świecie na matematykę natykamy się wszędzie, nawet w czasie wolnym, nawet w sporcie. A ze sportem właśnie możemy mieć do czynienia o wiele częściej w czasie wakacyjnych imprez dla dzieci niż w ciągu roku szkolnego. Choć, co oczywiste, nie znaczy to, że na takie problemy nie natknęliśmy się również w ciągu roku szkolnego.

Jakiś czas temu, bo w roku 2002, redakcja „Matematyki” przekazała mi list jednego z Czytelników (niestety, nie zachowałem go, więc nie mogę go dokładnie cy-

tować), w którym ten pytał, jak sensownie zorganizować szkolne zawody w biegu tak, żeby mieć pewność, że w zawodach tych każdy uczeń bezpośrednio zmierzy się z każdym. W istocie Czytelnikowi temu chodziło o to, żeby ustalić:

Jaka jest najmniejsza liczba biegów po 10 uczestników każdy, jaką należy zorganizować, żeby spośród 40 uczestników zawodów każdy z nich pobiegł w jakimś biegu z każdym innym uczestnikiem?

Oczywiście, problem nie jest wakacyjny, o czym świadczy samo pochodzenie i sformułowanie zadania – chodzi w nim o zawody szkolne, powstał on bowiem w czasie roku szkolnego. Niemniej, o ile w ciągu roku szkolnego problem taki może się pojawić, a zwłaszcza dotrzeć do nauczyciela matematyki, raczej wyjątkowo, to wydaje się, że w czasie wakacji mamy znacznie większe szanse, żeby z nim się zetknąć, jako że „w programie zajęć wakacyjnych niewątpliwą przewagę nad innymi ich rodzajami mają zajęcia typu WF...”. Dlatego wydaje się, że przełom wakacji i nowego roku szkolnego jest właściwym momentem, aby zająć się takim problemem.

Ale ponieważ Mistrzostwa Świata w piłce nożnej i czerwcowy upał mają wpływ również na piszącego te słowa, pozwolę więc sobie zacytować poniżej bez zmian moją niedyskretną odpowiedź (stąd forma listu skierowanego do pojedynczej osoby) na wspomniany wyżej list Czytelnika. Zanim jednak przejdziemy do tej odpowiedzi, zauważmy, że problem sformułowany w liście jest szczególnym przypadkiem następującego, bardziej ogólnego problemu:

Jaka jest najmniejsza liczba biegów po k uczestników każdy, jaką należy zorganizować, żeby spośród n uczestników zawodów każdy z nich pobiegł w jakimś biegu z każdym innym uczestnikiem?

A teraz już zapowiadana odpowiedź:

Problem, którego dotyczy nadesłane przez Pana zadanie, jest, niestety, problemem trudnym i – jak to wydaje się wynikać z przeglądu literatury – dotychczas nie został on rozwiązany w postaci ogólnej. W istocie tylko dla nie-

wielu par (n, k) znana jest najmniejsza liczba wymaganych biegów. Zadanie to wydaje się być kolejnym, dość typowym przykładem zadania-pułapki z kombinatoryki skończonej: łatwo się je formułuje, trudno rozwiązuje.

Oczywiście, w literaturze przedmiotu sam problem formułowany jest najczęściej w postaci abstrakcyjnej, choć zdarzają się ujęcia mniej formalne, a bardziej podobne do Pańskiego, tzn. dotyczące zawodów sportowych, turniejów, zakładów totolotki itp. W swej ogólnej postaci problem ten dotyczy następującego pojęcia:

- (n, k, l) -pokryciem nazywamy taką rodzinę K podzbiorów k -elementowych n -elementowego zbioru A , że każdy podzbiór l -elementowy zbioru A zawarty jest w co najmniej jednym zbiorze z rodziny K .

Mimo iż pojęcie to samo w sobie jest już dość ogólne, często spotyka się jego dalsze uogólnienia i warianty. W szczególności zamiast „jednego zbioru z rodziny K ” żąda się „ m zbiorów z rodziny K ” [wtedy mówimy o (n, k, l, m) -pokryciu], a warunek „co najmniej” zastępowany bywa warunkiem „dokładnie” (tzw. układy Steinera).

Powinno być jasne, że organizowanie biegów wśród n zawodników w taki sposób, że w każdym biegu weźmie udział k spośród nich, a każdy zawodnik będzie choć raz biegł z każdym innym, jest w istocie definiowaniem $(n, k, 2)$ -pokrycia.

Podstawowym pytaniem jest tu, oczywiście, pytanie o najmniejszą liczbę elementów danego pokrycia czy układu dla danych $n \geq k \geq l$ (m). Historia tego pytania, w jego różnych możliwych sformulowaniach, może zostać prześledzona wstecz, aż do pracy Steinera *Combinatorische Aufgabe* z 1853 roku, zamieszczonej w 45 tomie *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Do dzisiaj ukazało się sporo prac (w tym książek) związanych z tą problematyką, a ona sama stała się dość obszerną, samodzielną dziedziną badań znaną pod angielską nazwą (*combinatorial*) *designs, packings and coverings* (konfiguracje, upakowania i pokrycia). Jednak żadna z opublikowanych prac nie wydaje się zawierać ogólnej teorii rozwiązywania tego typu problemów, a w szczególności nie ma w nich ogólnego wzoru wyznaczającego najmniejszą moc odpowiedniego pokrycia. Wzoru takiego nie podaje np. *Handbook of Combinatorics* z 1995 roku, co pozwala, moim zdaniem, twierdzić, że wzór taki po prostu nie istnieje. Nawet w swej uproszczonej postaci, takiej jak w podanym przez Pana zadaniu, a więc dotyczącej $(n, k, 2)$ -pokryć, nie jest znana ogólna odpowiedź na pytanie o minimalną moc takich pokryć. Co więcej, poszczególne prace dotyczące tej problematyki pełne są rozważań „po przypadkach” oraz indywidualnych konstrukcji odpowiednich pokryć, dość często bardzo specyficznych dla poszczególnych, rozważanych w danej pracy przypadków.

W pracach tych czasami pojawiają się równości wyznaczające najmniejszą moc żadanego pokrycia, choć częściej można w nich znaleźć pewne oszacowania, zwykle dolne, tej liczby. Łatwo zauważyć, że liczba ta [oznaczana $C(n, k, l)$ dla (n, k, l) -pokryć] jest nie mniejsza niż $\text{symbN}(n, l)/\text{symbN}(k, l)$, gdzie $\text{symbN}(n, l)$ oznacza symbol Newtona „ n po l ”. W połowie lat osiemdziesiątych udowodniono, że iloraz ten stanowi w istocie asymptotyczną

wartość $C(n, k, l)$ przy $n \rightarrow \infty$. Natomiast mniej więcej od roku 1960 wiadomo, że liczba ta jest w istocie nie mniejsza niż $\lceil (n/k) \lceil (n-1)/(k-1) \rceil \lceil (n-2)/(k-2) \rceil \dots \lceil (n-l+1)/(k-l+1) \rceil \dots \rceil$, gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x (tzw. górną część całkowitą lub sufit), a powyższe wyrażenie oznaczane jest jako $L(n, k, l)$. Przy tym wiadomo także, iż warunkiem koniecznym i dostatecznym równości $C(n, k, l) = L(n, k, l)$ jest istnienie tzw. (n, k, l) -układu Steinera.

W szczególności dla $l = 2$ mamy: $C(n, k, 2) \geq L(n, k, 2) = \lceil (n/k) \lceil (n-1)/(k-1) \rceil \rceil$.

Wiadomo, że dla $k = 3$, a więc dla pokryć zbiorami trójelementowymi, mamy równość $C(n, 3, 2) = L(n, 3, 2)$ dla wszystkich n (lata 60.), ale już dla $k = 4$ mamy: $C(n, 4, 2) = L(n, 4, 2)$, $n \neq 7, 9, 10, 19$; $C(n, 4, 2) = L(n, 4, 2) + 1$, $n = 7, 9, 10$; $C(19, 4, 2) = L(19, 4, 2) + 2$ (lata 70.). Znane są również niektóre, ale nie wszystkie, wartości $C(n, 5, 2)$ (lata 80. i 90.).

Z powyższego wydaje się jasno wnikać, że jedna z „linii rozwojowych” ataku na ten problem przebiega po kolejnych wartościach k i że na razie wysiłki utknęły przy $k = 5$. A ponieważ napotykane tu trudności wydają się być olbrzymie w porównaniu z trudnościami dla poprzednich wartości k , zatem zanim badania dotrą do interesującej Pana wartości $k = 10$, może to jeszcze potrwać. I to bardzo długo!

Inna „linia ataku” prowadzi przez iloraz k/n . Ale również tutaj wyniki nie są imponujące. Znane są na przykład wartości $C(n, k, 2)$ dla wszystkich par n, k takich, że $n/2 \leq k \leq n$, a więc dla wartości ilorazu k/n leżącej w przedziale $[1/2, 1]$, ale uzyskano je w połowie lat 80. i od tego czasu nie wydaje się, żeby dokonano tu jakiegokolwiek postępu. Także również tutaj nie należy się raczej spodziewać szybkiego przełomu i dojścia do ilorazu k/n równego $1/4$, z jakim mamy do czynienia, gdy $k = 10$, a $n = 40$.

Oczywiście, nie są to wszystkie znane wyniki, ale w zasadzie wszystkie w jakimś sensie „systematyczne” – pozostałe wydają się być mocno fragmentaryczne lub izolowane.

Jedynie, co można powiedzieć od razu i na pewno o $C(40, 10, 2)$, a więc minimalnej liczbie biegów dziesiątkami w grupie 40 zawodników, to to, że wartość ta mieści się między $L(40, 10, 2) = 20$ a $\text{symbN}(8, 2) = 28$ (dzielimy zawodników na 8 grup po 5 i zestawiamy dziesiątki ze wszystkich par piątek). W istocie obydwie ograniczenia można poprawić: dolne do 21 [bo nie istnieje $(40, 10, 2)$ – układ Steinera, patrz wyżej], a górne do 26. To drugie uzyskuje się dzięki dość łatwej zależności ogólnej $C(qn + r, qk + r, l) \leq C(n, k, l)$, którą stosujemy tu dla $q = 3$, $n = 13$, $r = 1$, $k = 3$, oraz temu, że wiadomo (patrz wyżej), iż $C(13, 3, 2) = \lceil (13/3) \lceil 12/2 \rceil \rceil = 26$. Na mocy tej samej zależności, zastosowanej dla $q = 2$, $n = 20$, $r = 0$, $k = 5$, górnym ograniczeniem jest też liczba $C(20, 5, 2)$, ale, niestety, nie mam dostępu do artykułu, w którym ją podano, a więc nie wiem, czy jest mniejsza od 26.

To chyba wszystko, co udało mi się ustalić w związku z Pańskim problemem.

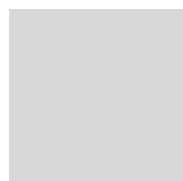
Adam Morawiec

Wykładowca w Pracowni Dydaktyki Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego.

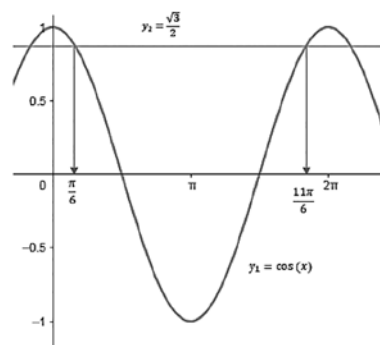
AUTOR: ANDRZEJ SOKOŁOWSKI

ZARYS PROGRAMU NAUCZANIA TRYGONOMETRII W USA

Trygonometria jako nauka nie ulega zmianom, jednakże treści nauczania podyktowane oczekiwaniami programów uniwersyteckich i rynku pracy z pewnością różnią się pomiędzy krajami. W poniższym artykule chciałbym przedstawić zarys programu nauczania trygonometrii w szkołach średnich w USA.



W *high school* (odpowiednik polskiego liceum) trygonometria jest połową rocznego kursu przygotowawczego do rachunku różniczkowego i całkowego, tzw. *Pre-AP Pre-Calculus*, który uczniowie zwykle poznają w klasie III. Warto dodać, że uczniowie mają średnio około 4 godzin matematyki w tygodniu. Trygonometria traktowana jest jako jednosemestralny kurs matematyki zarówno w szkołach średnich, jak i na uniwersytetach. Przedmiot trygonometrii nie tylko obejmuje wiedzę o funkcjach trygonometrycznych, ale również podkreśla ich aplikacje, szczególnie w naukach przyrodniczych.



Metodologia rozwiązania równania trygonometrycznego¹

OGÓLNA BUDOWA PROGRAMU

Program trygonometrii jest zbudowany progresywnie. Uczniowie poznają różne miary kątów i budowę funkcji trygonometrycznych: $y = \sin x$, $y = \cos x$ i $y = \tan x$. Wykresy, techniki znajdowania wartości tych funkcji dla $x \in \mathbb{R}$ i udowadnianie tożsamości trygonometrycznych są jego integralną częścią. Następnym etapem jest poznawanie funkcji cyklicznych (*inverse*) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ i $y = \arctan x$. Funkcje cykliczne oznaczane są również jako $y = \sin^{-1}x$. Wprowadzenie funkcji cyklicznych podyktowane jest między innymi potrzebą poznania techniki rozwiązywania równań trygonometrycznych, stosując własność złożenia funkcji $f^{-1}(f(x)) = x$. Aby więc rozwiązać:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

uczniowie aplikują $\cos^{-1}$ do obydwu stron równania;

$$\cos^{-1}(\cos x) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

i otrzymują:

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

które to równanie można dalej rozwiązać w zależności od podanego interwału. Warto dodać, że metodologia rozwiązywania trygonometrycznych równań oparta jest na znajdowaniu przecięcia systemu dwóch równań: funkcji trygonometrycznej i funkcji liniowej. Na przykład we współrzędnych XY równanie:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

będzie graficznie przedstawione jako system:

$$y_1 = \cos x \text{ i } y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

którego rozwiązaniami są:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ lub } x = \frac{11\pi}{6} \text{ (ryc. 1).}$$

Idea przecięcia dwóch funkcji jako reprezentująca rozwiązanie jest często stosowana zarówno z użyciem graficznego kalkulatora, jak i w sytuacjach, kiedy znane metody zawodzą, na przykład $3^x = x^2$.

Funkcje cykliczne dyskutowane są też z perspektywy restrykcji ich dziedzin, tak by spełniały one warunek funkcji. Dalszym etapem studiowania funkcji trygonometrycznych są funkcje budowane poprzez odwrócenie funkcji podstawowych, tak więc:

$$y = \frac{1}{\sin x} = \csc x, y = \frac{1}{\cos x} = \sec x \text{ i } y = \frac{1}{\tan x} = \cot x.$$

W języku angielskim funkcje te nazywane są *reciprocal trigonometric functions*. Ich korespondujące funkcje cykliczne (nazywane w języku angielskim *inverse functions*) są następujące: $y = \operatorname{arccsc} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$ i $y = \operatorname{arccot} x$. Celem wprowadzenia tych funkcji jest umożliwienie znajdowania wartości kątów, kiedy wartości funkcji $y = \csc x$, $y = \sec x$ i $y = \cot x$ są podane. W tabeli 1 zawarto zestawienie wszystkich funkcji trygonometrycznych, które włączane są w program nauczania.

Chciałbym w tym miejscu dodać dygresję na temat tłumaczeń nomenklatur funkcji. Według słownika naukowo-technicznego angielsko-polskiego², obydwa określenia angielskie *inverse functions* i *reciprocal functions* tłumaczone są na język polski jako funkcje odwrotne. Nie jest to zupełnie ściśle ze sposobem, w jaki te funkcje są przedstawiane w podręcznikach angielskojęzycznych do matematyki. Jeśli $y = f(x)$ jest daną funkcją, jej *inverse* jest budowany poprzez zamianę jej zmiennych $x = f(y)$ i rozwiązanie tego równania na y , co prowadzi do $f^{-1}(x) = y$ nazywa się więc *inverse of f(x)*.

Natomiast *reciprocal* funkcji $f(x)$ jest budowany poprzez

$\frac{1}{f(x)}$, które to wyrażenie może określać nową funkcję $g(x)$.

$$\frac{1}{f(x)} = g(x) \text{ nazywa się } \textit{reciprocal of f(x)}.$$

Można zapisać proces znajdowania *reciprocal* jako $[f(x)]^{-1}$. Jednakże $f^{-1}(x)$ i $[f(x)]^{-1}$ symbolizują tu różne operacje na funkcji $f(x)$. Sumując, funkcje *inverse* i *reciprocal* są budowane poprzez dwie diametralnie różne operacje matematyczne³.

Wydaje się, że funkcje, które są budowane poprzez znajdowanie:

$$\frac{1}{f(x)}$$

mogą być przetłumaczone na język polski jako funkcje odwrotne.

Tabela 1. Funkcje trygonometryczne w programie szkoły średniej w USA

Rodzaj funkcji	Sinus	Cosinus	Tangens
Podstawowe	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Cykliczne do podstawowych	$y = \sin^{-1}x$	$y = \cos^{-1}x$	$y = \tan^{-1}x$
Reciprocal do podstawowych	$y = \csc x$	$y = \sec x$	$y = \cot x$
Cykliczne do funkcji odwrotnych	$y = \csc^{-1}x$	$y = \sec^{-1}x$	$y = \cot^{-1}x$

Natomiast funkcje $f^{-1}(x)$ byłyby przetłumaczone jako cykliczne lub może inwersyjne? Rozróżnienie tych funkcji w tłumaczeniach wydaje się potrzebne, tym bardziej że znajdowanie funkcji *reciprocal* i *inverse* jest częstą operacją matematyczną dokonywaną nie tylko na funkcjach trygonometrycznych, ale również na funkcjach algebraicznych. Na przykład *inverse* funkcji $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ jest funkcja $g^{-1}(x) = x^2$.

Natomiast funkcją odwrotną (*reciprocal*) do $g(x) = \sqrt{x}$ będzie funkcja:

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Tak więc nazywanie obydwóch:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ i } f^{-1}(x) = y,$$

jak to jest czynione w słownikach, funkcjami odwrotnymi może prowadzić do nieporozumień szczególnie wśród studentów z Polski, którzy decydują się studiować w USA.

SPOSÓB PRZEDSTAWIANIA PROCESÓW RYSOWANIA WYKRESÓW FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

Podobnie jak w programach polskich, tak też w USA wprowadza się wykres podstawowej funkcji trygonometrycznej, korzystając z własności okresowości. Podobnie jak w polskich programach, do oszacowania wartości tych funkcji korzysta się z tzw. okręgu jednostkowego (*unit circle*).

Bardziej kompleksowe funkcje trygonometryczne w formach $f(x) = A[k(x - p)] + q$ rysuje się, korzystając z transformacji funkcji podstawowych. Wymagane jest również, by student potrafił narysować nie tylko funkcje podstawowe, ale również odwrotne.

Należałoby dodać, że rysowanie funkcji, stosując transformacje, jest bardzo podkreślane w innych kursach matematyki w szkołach średnich w USA. Dzięki temu rysowanie kompleksowych wykresów funkcji trygonometrycznych nie jest dla uczniów trudne. Oczekuje się również, że uczniowie potrafią znaleźć algebraiczną postać wykresu.

APLIKACJE

Uczniowie stosują funkcje trygonometryczne do rozwiązywania trójkątów podobnie jak w polskich programach nauczania. Stosują również prawo sinusów i cosinusów. Z uwagi na duży nacisk rozumienia pojęcia funkcji w amerykańskich programach do matematyki, dużo uwagi poświęca się aplikacjom, korzystając również z radialnej miary kątów. Wprowadza się na przykład pojęcie miary kątowej położenia ciała i jego prędkości kątowej, które to później wykorzystuje się do budowy funkcji opisującej ruch periodyczny. Oczekuje się, że uczniowie potrafią zbudować funkcje jednowymiarowego położenia ciała lub prędkości w ruchu harmonicznym dla dowolnej początkowej wartości. Uczniowie muszą wiedzieć, że odpowiednikiem maksymalnego położenia ciała w ruchu harmonicznym jest amplituda funkcji, a także znać ogólną postać funkcji harmonicznej:

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \text{ gdzie } T \text{ oznacza okres funkcji.}$$

W związku z aplikacjami uczniowie muszą też być zapoznani z rozwiązaniem równań trygonometrycznych nie tylko wówczas, kiedy wielkością szukaną jest kąt wyrażony w stopniach lub radianach, ale również wtedy, kiedy wielkością szukaną jest czas, na przykład:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 0.$$

Szeroka gama aplikacji stwarza możliwości modelowania funkcji trygonometrycznych z użyciem symulacji fizycznych⁴. Przedstawianie uczniom aplikacji trygonometrii, szczególnie w fizyce lub biologii, przyczynia się do poprawy zrozumienia trygonometrycznych zagadnień oraz pobudza naukowe myślenie uczniów i pomaga w zrozumieniu zjawisk przyrodniczych.

ZAGADNIENIA UZUPEŁNIAJĄCE

W dziale trygonometrii uczniowie poznają również elementy geometrii analitycznej, na przykład operacje na wektorach, włączając iloczyn skalarny i wektorowy oraz znajdowanie kąta pomiędzy wektorami. Przekształcanie współrzędnych prostokątnych na polarne i rysowanie wykresów podanych w polarnych współrzędnych na przykład $r = a \pm b \cos(\alpha)$ lub $r = a \cos(n\alpha)$ również jest wymagane. Uczniowie muszą umieć przedstawić liczby urojone w postaci trygonometrycznej i zastosować twierdzenie De Moivre. Dział ten obejmuje również inne zagadnienia, które nauczyciel może realizować, jeśli czas na to pozwala.

PODSUMOWANIE

Przedmiot trygonometrii nie jest łatwy dla uczniów. Trudna jest szczególnie kompleksowość różnych rodzajów funkcji, z których nie wszystkie mają odpowiedniki w poznanych wcześniej funkcjach algebraicznych. Program ten ma na celu przygotowanie uczniów do kontynuowania studiowania rachunku różniczkowego i całkowego, a także fizyki zarówno w szkole średniej, jak i na studiach. Jako taki, program ten spełnia te warunki bardzo dobrze.

Bibliografia:

1. <https://www.slideshare.net/timschmitz/higher-maths-123-trigonometric-functions-358346>.
2. *Słownik Naukowo-Techniczny Angielsko-Polski*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1990.
3. Stewart J., *Precalculus, 2nd edition*, Pacific Grove, Ca: Brooks and Cole Publishing Company 2010.
4. Sokołowski A., Rackley R., *Teaching harmonic motion in trigonometry: Inductive inquiry supported by physics simulations*, „Australian Senior Mathematics Journal” 25(1)/2011, s. 45.

Andrzej Sokołowski

Matematyk i fizyk. Ostatnio opublikował książkę „Scientific Inquiry in Mathematics” w Wydawnictwie Springer.

AUTOR: ZYGMUNT KRAWCZYK

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY KĄTY

W kolejnej serii zadań o trójkącie prostokątnym obliczamy pola i obwody trójkątów oraz długości odcinków. W każdym zadaniu jedną z danych jest wartość pewnej funkcji trygonometrycznej jednego z kątów ostrych.



Zadanie 1 Oblicz pole i obwód trójkąta prostokątnego, wiedząc, że długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego $h = 4$ oraz $\sin \alpha = 0,6$, gdzie α jest miarą jednego z kątów ostrych.

Zadanie 2 Oblicz pole i obwód trójkąta prostokątnego, znając długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego $s = 6$ oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, gdzie α jest miarą jednego z kątów ostrych.

Zadanie 3 Oblicz pole i obwód trójkąta prostokątnego, znając długość dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego $d = 12$ oraz $\tan \alpha = 3$, gdzie α jest miarą jednego z kątów ostrych.

Zadanie 4 W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość CD . Oblicz pole i obwód tego trójkąta, jeżeli $|BD| = 2$ oraz $\sin \alpha = 0,25$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 5 W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołka kąta prostego dwusieczną CD . Oblicz pole i obwód tego trójkąta, jeżeli długość odcinka $|AD| = 5$ oraz $\tan \alpha = 2$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 6 Oblicz pole i obwód trójkąta prostokątnego, znając długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt $r = 2$ oraz $\sin \alpha = 0,8$, gdzie α jest miarą jednego z kątów ostrych.

Zadanie 7 W trójkącie prostokątnym ABC suma długości przyprostokątnych AC i BC wynosi $s = 12$. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, gdzie α jest miarą jednego z kątów ostrych.

Zadanie 8 W trójkącie prostokątnym ABC suma długości przyprostokątnej BC i przeciwprostokątnej AB wynosi $s = 27$. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 9 Obwód trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB wynosi $s = 12$. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, gdzie α jest miarą jednego z kątów ostrych.

Zadanie 10 W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość CD . Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli pole trójkąta BDC jest równe $S = 15$ oraz $\cos \alpha = \sqrt{0,7}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.



Zadanie 11 W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość CD i środkową CE . Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli pole trójkąta CDE jest równe $S = 10$ oraz $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 12 W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość CD i dwusieczną CE . Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli pole trójkąta CDE jest równe $S = 7,2$ oraz $\cos \alpha = 0,8$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 13 W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołków kątów ostrych środkowe AD i BE . Oblicz długość środkowej BE , jeżeli $|AD| = \sqrt{34}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = 2$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 14 W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołków kątów ostrych dwusieczne AD i BE . Oblicz długość dwusiecznej BE , jeżeli $|AD| = \sqrt{2} + \sqrt{14}$ oraz $\cos \alpha = 0,75$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 15 W trójkącie prostokątnym ABC długość promienia okręgu dopisanego stycznego do przyprostokątnej AC jest równa $r_a = 8$. Oblicz długość promienia okręgu dopisanego r_b stycznego do przyprostokątnej BC , jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 16 W trójkąt prostokątny ABC wpisano kwadrat $CDEF$ tak, że wierzchołki D i F leżą odpowiednio na przyprostokątnych AC i BC , a wierzchołek E leży na

przeciwprostokątnej AB . Oblicz długość odcinka BF , jeżeli $|AD| = 7$ oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 17 W trójkąt prostokątny ABC wpisano kwadrat $DEFG$ tak, że jego wierzchołki D i E leżą na przeciwprostokątnej AB , a wierzchołki F i G leżą odpowiednio na przyprostokątnych BC i AC . Oblicz długość odcinka BE , jeżeli $|AD| = 25$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 18 W trójkąt prostokątny ABC wpisano kwadrat $DEFG$ tak, że jego wierzchołki D i E leżą na przeciwprostokątnej AB , a wierzchołki F i G leżą odpowiednio na przyprostokątnych BC i AC . Oblicz długość odcinka CE , jeżeli $|CD| = \sqrt{13}$ oraz $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 19 W trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej wpisano dwa kwadraty: kwadrat $CDEF$ tak, że jego wierzchołki D , E i F leżą odpowiednio na bokach AC , AB i BC oraz kwadrat $GHJK$ tak, że jego wierzchołki G i H leżą na przeciwprostokątnej AB , a wierzchołki J i K leżą odpowiednio na przyprostokątnych BC i AC . Oblicz długość boku kwadratu $CDEF$, jeżeli długość boku kwadratu $GHJK$ jest równa $a = 6\sqrt{5}$ oraz $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 20 Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB zbudowano kwadrat $ADEB$. Oblicz długość odcinka CE , jeżeli $|CD| = \sqrt{26}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.



Zadanie 21

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB zbudowano dwa kwadraty $BDEC$ i $CFGA$. Oblicz długość odcinka BG , jeżeli $|AD| = \sqrt{58}$ oraz $\cos \alpha = 0,8$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 22

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB zbudowano dwa trójkąty równoboczne BDC i CEA o środkach odpowiednio P i Q . Oblicz długość odcinka BQ , jeżeli $|AP| = \sqrt{19}$ oraz $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 23

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E tak, że $|AD| = |DE| = |EB|$. Oblicz długość odcinka CE , jeżeli $|CD| = \sqrt{14}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

Zadanie 24

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E tak, że $|\angle ACD| = |\angle DCE| = |\angle ECB|$. Oblicz długość odcinka CE , jeżeli $|CD| = 9$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 1 $P = \frac{50}{3}, L = 20$

Zadanie 2 $P = 16\sqrt{2}, L = 8 \cdot (2 + \sqrt{2})$

Zadanie 3 $P = 192, L = 16 \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{5})$

Zadanie 4 $P = 32\sqrt{15}, L = 8 \cdot (5 + \sqrt{15})$

Zadanie 5 $P = 45, L = 3 \cdot (5 + 3\sqrt{5})$

Zadanie 6 $P = 24, L = 24$

Zadanie 7 $P = 16$

Zadanie 8 $P = 67,5$

Zadanie 9 $P = 18 \cdot (7 - 3\sqrt{5})$

Zadanie 10 $P = 50$

Zadanie 11 $P = 36$

Zadanie 12 $P = 105$

Zadanie 13 $|BE| = 8,5$

Zadanie 14 $|BE| = \frac{14}{3}$

Zadanie 15 $r_b = 12$

Zadanie 16 $|BF| = 14$

Zadanie 17 $|BE| = 9$

Zadanie 18 $|CE| = \sqrt{10}$

Zadanie 19 $|GH| = 14$

Zadanie 20 $|CE| = 2\sqrt{5}$

Zadanie 21 $|BG| = \sqrt{65}$

Zadanie 22 $|BQ| = \sqrt{21}$

Zadanie 23 $|CE| = \sqrt{11}$

Zadanie 24 $|CE| = 7\sqrt{3}$

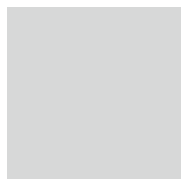
Zygmunt Krawczyk

Nauczyciel matematyki ZSP w Szprotawie
i SŁO w Żarach. Autor zadań i artykułów.

AUTOR: JANUSZ KARKUT

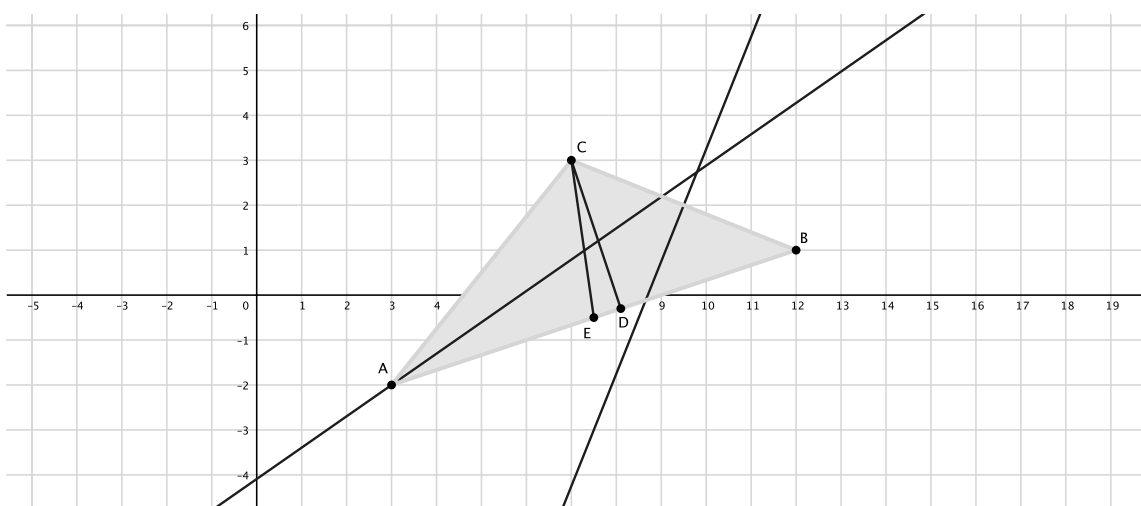
MATEMATYKA Z GEOGEBRĄ

PUNKTY SZCZEGÓLNE TRÓJKĄTA



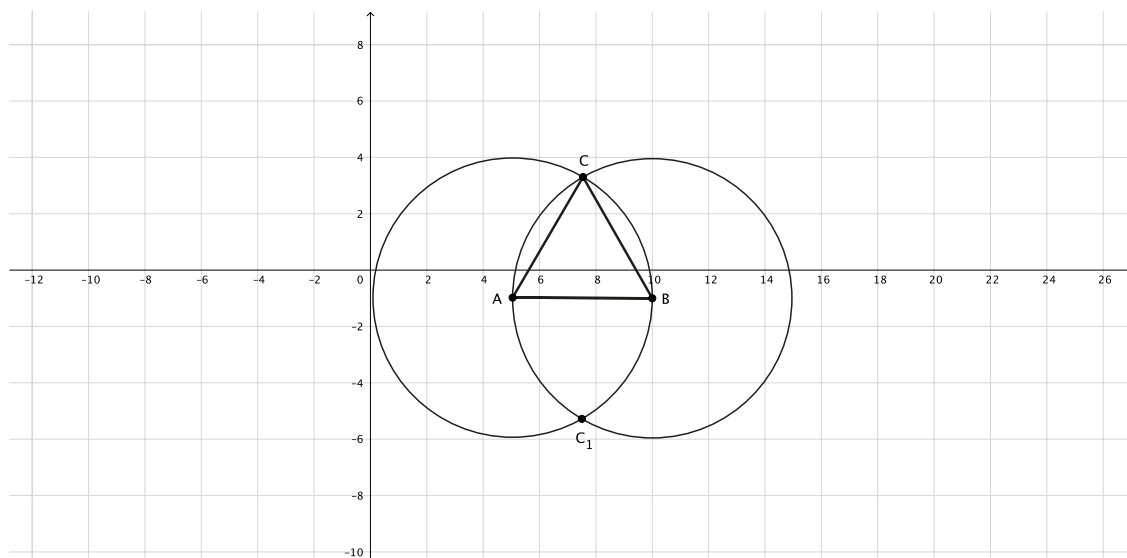
Przy pomocy narzędzia **Wielokąt** utwórz trójkąt ABC . Poprowadź prostą prostopadłą do AB przez punkt C , używając narzędzia **Proste prostopadłe**, zaznacz punkt przecięcia tej prostej z bokiem $AB(D)$, utwórz odcinek CD i ukryj prostą, klikając **Pokaż obiekt**. Odcinek CD jest jedną z wysokości trójkąta ABC .

Skonstruujmy jeszcze dwusieczną kąta BAC , wybierając narzędzie **Dwusieczna kąta** i klikając kolejno na punkty B, A, C , symetralną boku BC (przy pomocy narzędzia **Symetralna** tworzymy symetralną; klikamy na punkty B i C lub na odcinek BC) oraz środkową boku BA [przy pomocy narzędzia **Środek** znajdujemy środek boku BA (E) i tworzymy odcinek CE].



Skonstruujmy teraz trójkąt równoboczny. Możemy to zrobić na dwa sposoby:

- Trójkąt tworzymy przy pomocy narzędzia **Wielokąt foremny**: wybieramy to narzędzie, a w oknie dialogowym wpisujemy 3.
- Tworzymy odcinek AB , a następnie przy pomocy narzędzia **Okrąg o danym środku** przechodzący przez punkt tworzymy dwa okręgi: okrąg o środku A przechodzący przez B i okrąg o środku B przechodzący przez A . Następnie znajdujemy punkt przecięcia się tych okręgów i łączymy punkty A, B, C .

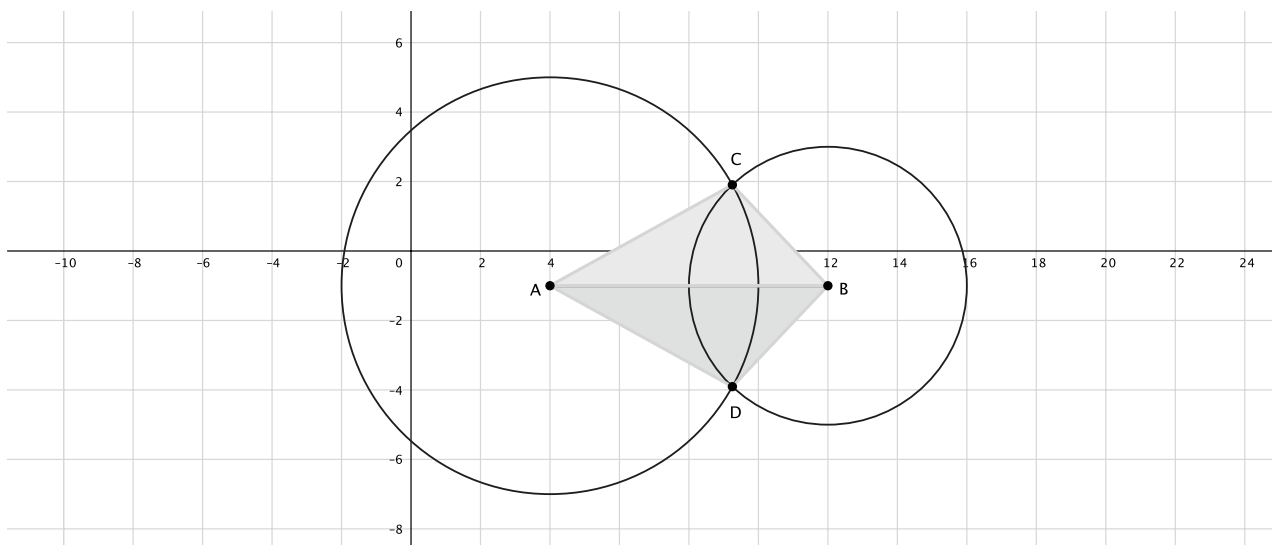


Podobnie konstruujemy trójkąt równoramienny – z tym że okręgi tworzymy przy pomocy narzędzia **Okrąg o danym środku i promieniu**.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 1

Skonstruujmy trójkąt o bokach długości 8, 6 i 4. Przy pomocy narzędzia **Odcinek o określonej długości** tworzymy odcinek AB o długości 8. Następnie przy pomocy narzędzia **Okrąg o danym środku i promieniu** tworzymy dwa okręgi: Okrąg o środku A i promieniu 6 oraz okrąg o środku B i promieniu 4. Przy pomocy narzędzia **Przecięcie dwóch obiektów** znajdujemy punkty C i D przecięcia się okręgów i tworzymy dwa (przystające) trójkąty spełniające podane warunki.



Ćwiczenie 2

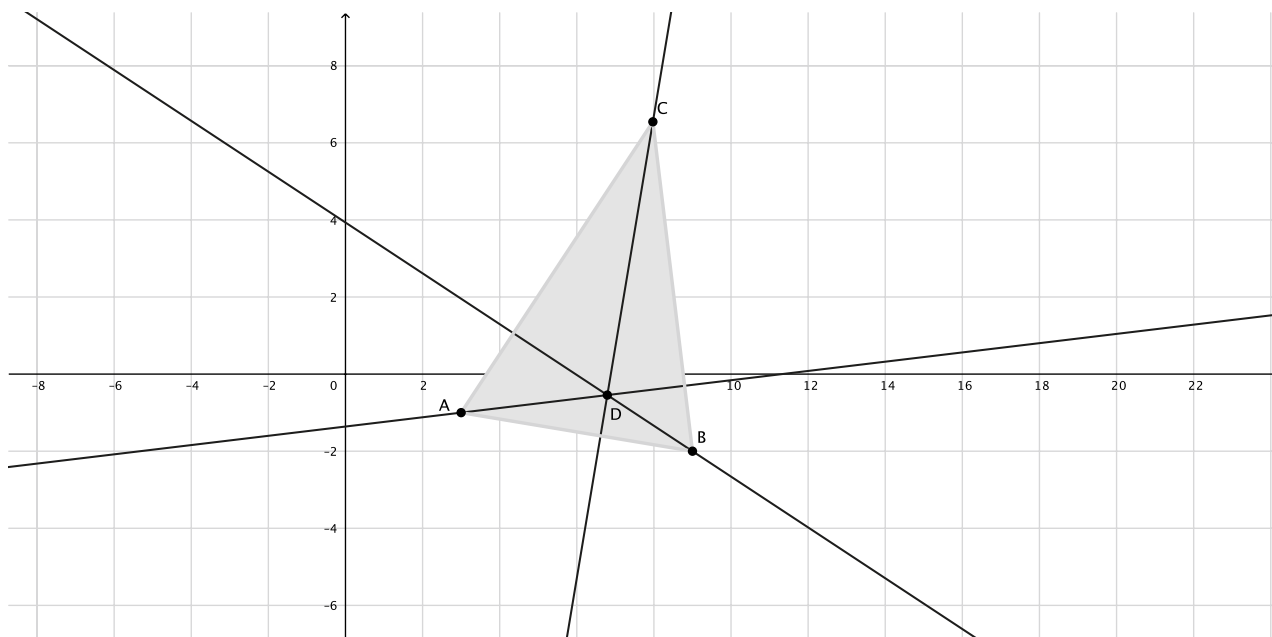
Pokaż, że nie można utworzyć trójkąta o bokach długości 8, 5, 2.

Ćwiczenie 3

Utwórz środek okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym.

Ćwiczenie 4

Utwórz ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC (punkt przecięcia się prostych zawierających wysokości trójkąta – D).



Przy pomocy narzędzia **Przesuń** zmień trójkąt na rozwartokątny. Co dzieje się z punktem D ? W jakim trójkącie ortocentrum pokrywa się z wierzchołkiem?

Janusz Karkut

Nauczyciel matematyki, AZPO Lubawa.

AUTOR: MAGDALENA ŻOŁNIERCZYK

KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE A *GEOGEBRA*

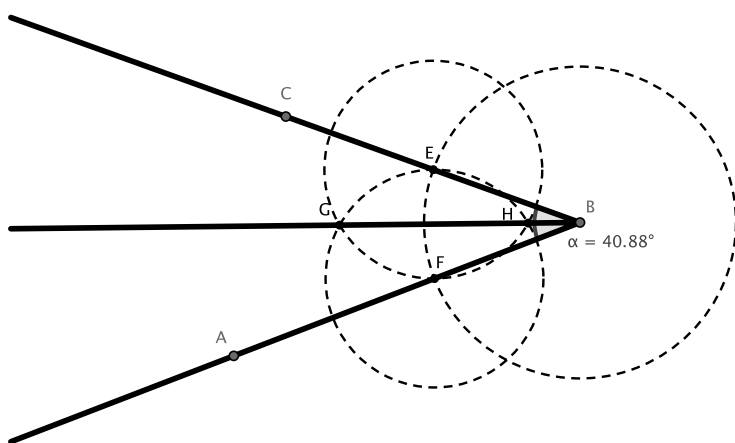
Jakie miejsce zajmują obecnie konstrukcje geometryczne w nauczaniu matematyki? Myślę, że trudno udzielić na to pytanie jednoznacznej odpowiedzi. Na pewno dużo zależy od indywidualnego podejścia nauczyciela i nacisku kładzionego przez niego na ten element edukacji matematycznej, jakim jest umiejętność wykonywania konstrukcji.

Jeżeli chodzi o odgórne zalecenia, to w momencie ostatnich zmian konstrukcje zostały „przeniesione” do szkoły ponadpodstawowej. Niestety, jest to temat mogący być postrzegany jako nieco problematyczny dla nauczycieli. Z jednej strony mamy bowiem obowiązek uczyć ich wykonywania, a z drugiej strony trzeba przyznać, że raczej trudno znaleźć te zagadnienia w pytaniach podczas egzaminów zewnętrznych. Dlatego też czasami możemy w tym temacie realizować plan minimum, to znaczy zrobić tylko to, co musimy, pokazać uczniom konieczne konstrukcje, ale potem już nie przywiązywać

do nich większej wagi. Dla porównania warto zajrzeć do starszych podręczników do nauki geometrii, w których konstrukcje zajmują bardzo dużo miejsca. Dlaczego przez lata były one tak ważne? Ponieważ uczyć wyobraźni geometrycznej, z którą, niestety, nasi uczniowie coraz częściej miewają problem. Dlatego też, pomimo iż raczej nikt nie będzie kazał wykonywać uczniom konstrukcji na maturze, to jednak nie zapominajmy o nich.

Ponadto coraz więcej naszych sal lekcyjnych jest wyposażona w tablice interaktywne, a, niestety, niektóre ich oprogramowania nie mają łatwo dostępnych narzędzi geometrycznych, zatem niezastąpioną pomocą może

okazać się wykorzystanie GeoGebry do wykonywania konstrukcji. Jedynym minusem jest fakt, że wykonanie ich w programie wygląda nieco inaczej niż na kartce papieru czy na tablicy. Jedną z podstawowych różnic jest to, że podchodząc tradycyjnie do konstrukcji, kreślimy jedynie łuki, podczas gdy w GeoGebry dla poprawności otrzymanych rysunków w większości przypadków konieczne będą całe okręgi. Z kolei plusem użycia programu jest to, że zbędne linie i okręgi możemy bez problemu ukryć. Mamy także możliwość odtwarzania konstrukcji krok po kroku. Ponieważ o takim sposobie pracy wspominałam już wcześniej, teraz przypomnę go na przykładzie konstrukcji dwusiecznej kąta wypukłego.

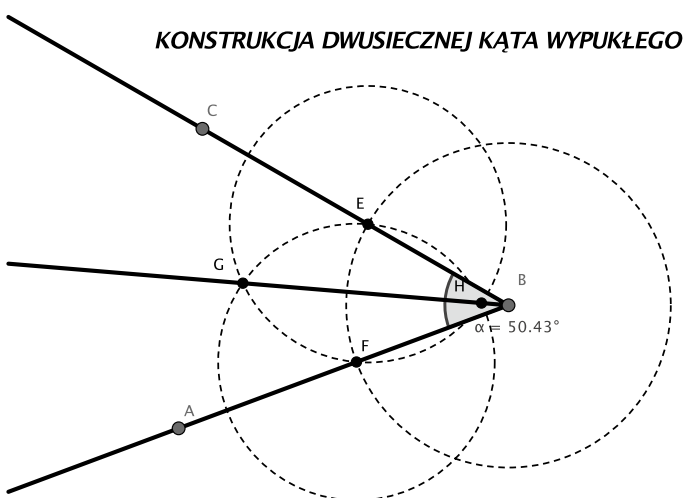


Ryc. 1

Ryc. 2

Musimy najpierw wykonać całą konstrukcję, dodać odpowiednie opisy, a następnie wyświetlać na przykład za pomocą suwaka kolejne jej etapy. Zaczynamy, oczywiście, od zaznaczenia kąta  poprzez wybór trzech punktów oraz narysowanie półprostych będących jego ramionami. We właściwościach obiektu możemy zaznaczyć, że interesuje nas kąt o mierze od 0° do 180° . Następnie kreślimy okrąg  z wierzchołka kąta, przechodzący przez dowolny punkt na wybranym jego ramieniu. Z punktów przecięcia tego okręgu z ramionami kąta kreślimy okręgi o promieniu, którego długość jest równa odległości pomiędzy tymi dwoma punktami. Następnie przez punkty przecięcia okręgów prowadzimy półprostą, która jest szukaną dwusieczną kąta. Po wykonaniu rysunku możemy sformatować odpowiednio obiekty na nim występujące, aby był on bardziej czytelny (ryc. 1).

Tak wykonany rysunek możemy opisać, wprowadzając polecenia do kolejnych etapów konstrukcji. Mogą one być widoczne przez cały czas bądź wyświetlać się krok po kroku. Jeżeli wybierzemy drugą opcję, to będziemy potrzebowali suwaka n , przyjmującego wartości całkowite od 0 do 3 (lub innej liczby, w zależności od liczby etapów konstrukcji, jakie umieściliśmy w komentarzach). Następnie we właściwościach obiektów, w zakładce **Zaawansowane**, musimy podać odpowiednie warunki wyświetlania obiektów. I tak, dla pierwszego kroku opisu i dla okręgu o środku w wierzchołku kąta oraz punktów przecięcia tego okręgu z ramionami kąta podajemy warunek $n > 0$. Dla opisu drugiego etapu oraz dla dwóch kolejnych okręgów i punktów ich przecięcia wpisujemy warunek $n > 1$. Natomiast dla ostatniego kroku oraz dla dwusiecznej kąta ustalamy jako warunek wyświetlania $n > 2$. W ten sposób otrzymamy kolejne elementy na rysunku pojawiające się równolegle z opisem (ryc. 2).



KONSTRUKCJA DWUSIECZNEJ KĄTA WYPUKŁEGO

Dany mamy kąt: $\angle ABC$.

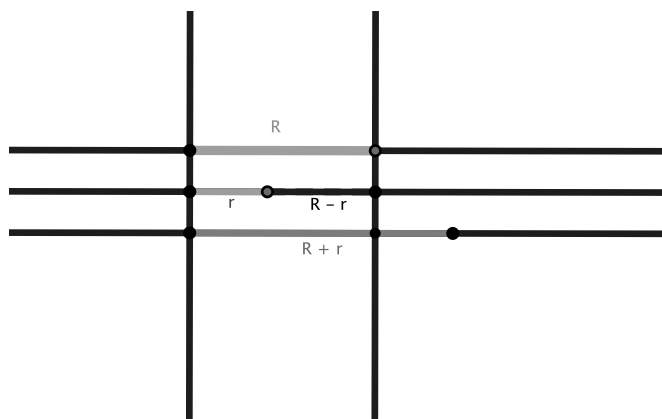
- ☒ 1. Kreślimy łuk/okrąg o dowolnym promieniu z wierzchołka kąta – punktu B. Otrzymujemy punkty E i F.
- ☒ 2. Kreślimy łuki/okręgi o środkach w punktach E i F i promieniu $|EF|$. Otrzymujemy punkty G i H.
- ☒ 3. Kreślimy półprostą o początku w punkcie B i przechodzącą przez punkt G (oraz H). Otrzymujemy dwusieczną $\angle ABC$.



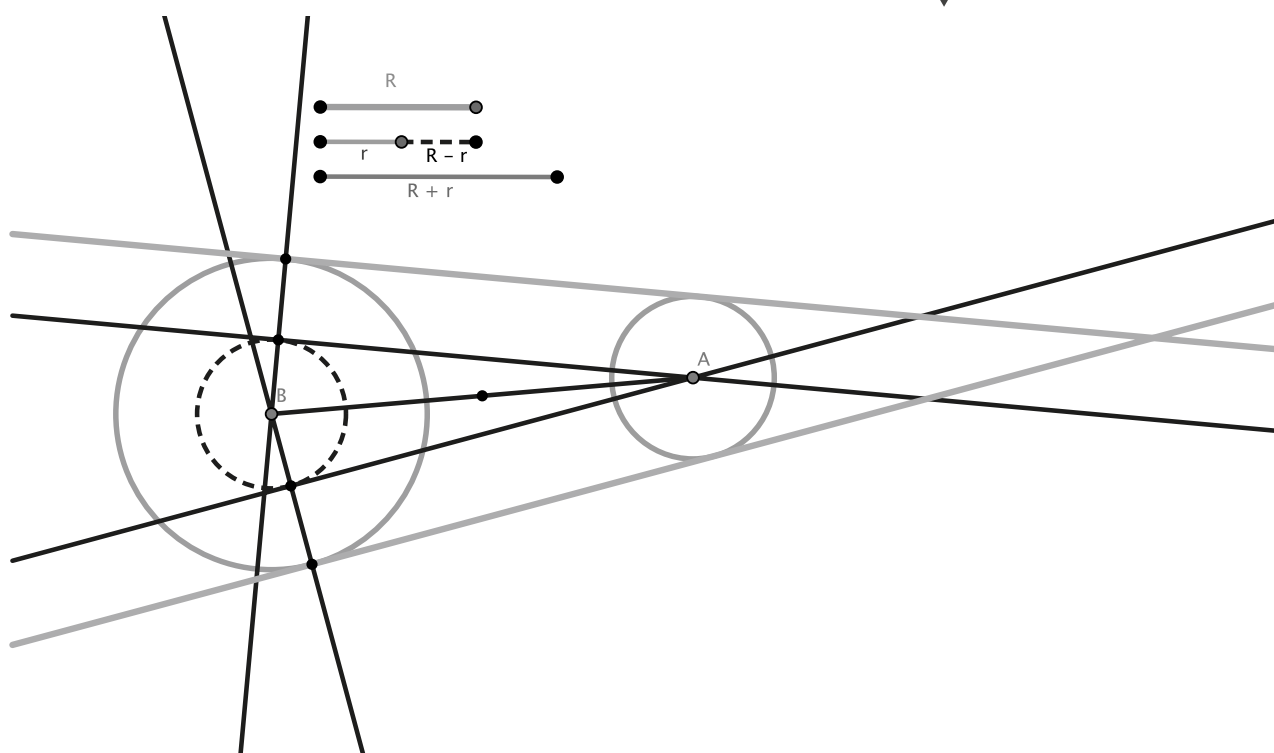
Możemy także użyć dwóch okien widoku grafiki i polecić uczniom samodzielne wykonanie konstrukcji. Wtedy na przykład w oknie **Widok grafiki 1** umieszczamy opis konstrukcji (z suwakiem lub bez) i pozostawiamy w nim miejsce na rysunek uczniów, a w oknie **Widok grafiki 2** ukrywamy całą gotową konstrukcję, która będzie widoczna dopiero po kliknięciu napisu SPRAWDŹ (napis może być opisem pola wyboru pokaż/ukryj, pod który „podepnijemy” wszystkie obiekty użyte podczas konstrukcji).

Analogicznie do opisanego powyżej sposobu możemy wprowadzać na lekcjach praktycznie wszystkie omawiane podstawowe konstrukcje geometryczne, takie jak: proste prostopadła i równoległa przechodzące przez dany punkt, symetralna odcinka, dwusieczna kąta, styczna do okręgu czy okręgi wpisane i opisane. Jednak nie tylko na te konstrukcje powinniśmy znaleźć czas na naszych lekcjach. Mimo starań bardzo często te wyżej wymienione pojawiają się na lekcji jako gotowe schematy do nauczenia się przez ucznia. Często nie mamy czasu, albo nawet nie pomyślimy o tym, żeby pozwolić uczniom wpaść na pomysł, jak wykonać dany rysunek, mając tylko czystą kartkę, linijkę i cyrkiel. Co stoi na przeszkodzie, aby potraktować takie zagadnienia jak problem do rozwiązania? Uczniowie, którzy w szkole podstawowej nie zetkną się z konstrukcjami, z pewnością w szkole średniej chętnie popatrzą na takie zadania jak na problem, wręcz zagadkę. To, w jaki sposób możemy podejść do pewnych zagadnień, w dużej mierze zależy od zespołu klasowego, z jakim pracujemy, i od naszego wyczucia, na ile możemy sobie pozwolić. Niektórych uczniów być może trzeba będzie zapoznać z podstawowymi konstrukcjami, aby potem mogli sami próbować wykonywać te bardziej skomplikowane, podczas gdy inni mogliby samodzielnie odkrywać konstrukcje właściwie od początku.

Ryc. 3



Ryc. 4



Ciekawym zadaniem problemowym dotyczącym bezpośrednio konstrukcji może być analiza zagadnienia: proste styczne do dwóch okręgów. Przede wszystkim nie musimy uczniom z góry narzucać, ile tych prostych powinno być, ani mówić, w jakim położeniu mają znajdować się rozpatrywane okręgi. Dla tych, którzy nigdy nie próbowali zadać takiego problemu uczniom, polecam je szczególnie. I jestem pewna, że każda grupa uczniów zaskoczy w takim momencie swojego nauczyciela. Dodatkowo eksperymenty z GeoGebra mogą być w tym wypadku wyjątkowo ciekawe i wciągające.

Do wykonania ilustracji do tego problemu będziemy potrzebować dwóch okręgów. Promień jednego z nich musi być zawsze większy od drugiego (to rozróżnienie będzie konieczne do poprawnego wykonania konstrukcji). Aby sobie to zapewnić, wystarczy wprowadzić odcinki, które będą wyznaczały długości promieni. Żeby ich końce nie przemieszczały się w dowolnym kierunku, należy umieścić je na prostych, które potem ukryjemy. Dodatkowo koniec odcinka wyznaczającego promień mniejszego okręgu powinien być umieszczony na dłuższym odcinku (potem możemy go przenieść). Ponadto do konstrukcji będziemy potrzebowali także odcinków o długościach równych sumie i różnicy długości promieni rozpatrywanych okręgów. Przenosząc długości odcinków za pomocą prostych prostopadłych, równoległych i okręgów o wybranych promieniach, uzyskujemy przygotowane przez nas samych suwaki (ryc. 3). Oczywiście, pomocnicze proste musimy ukryć.

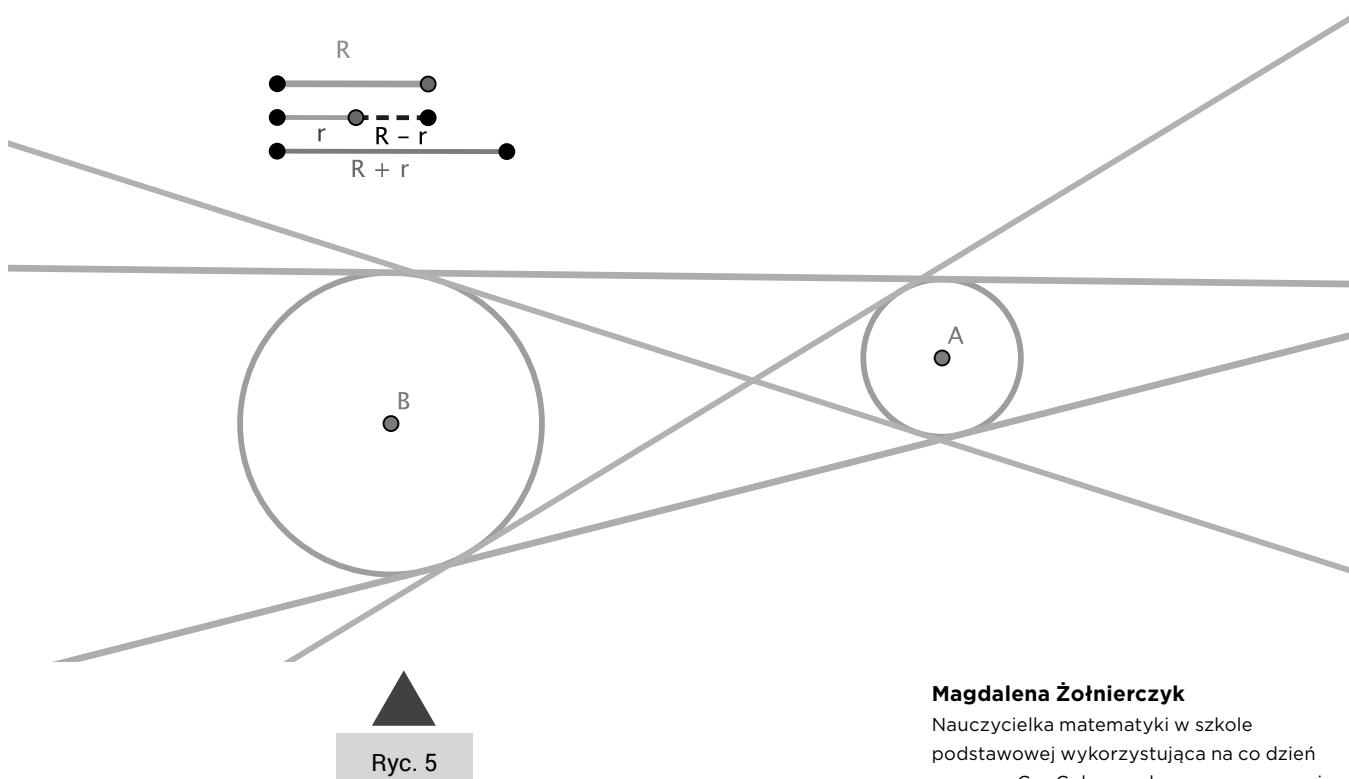
Przechodząc do konstrukcji stycznych, rysujemy najpierw okrąg o promieniu równym różnicy promieni, współśrodkowy z większym okręgiem. Następnie konstruujemy styczne do powstałego okręgu, przechodzące przez środek mniejszego okręgu. Potem rysujemy proste prostopadłe

do tych stycznych przez środek większego okręgu. Otrzymujemy punkty przecięcia tych prostych z większym okręgiem. Rysujemy proste prostopadłe do ostatnich prostych przez ich punkty przecięcia z okręgiem. To są szukane styczne (ryc. 4).

W podobny sposób otrzymamy drugą parę stycznych – różnica polega tylko na tym, że na początku rysujemy okrąg o promieniu będącym sumą promieni wyjściowych okręgów. Oczywiście, obiekty pomocnicze musimy poukrywać, gdyż przy tak złożonej konstrukcji rysunek byłby kompletnie nieczytelny. Możemy także zastosować pewne uproszczenia. Jeżeli wiemy, że uczniowie opanowali na przykład konstrukcję prostej prostopadłej, możemy polecić im korzystanie z narzędzia wbudowanego w menu programu. Podobnie możemy postąpić ze środkiem odcinka. Gotowy rysunek ze wszystkimi stycznymi i poukrywanymi niezbędnymi obiektami przedstawiono na ryc. 5.

Zmieniając długości promieni okręgów oraz położenie ich środków, możemy obserwować liczbę stycznych i ich ułożenie.

Na koniec chciałam dodać jeszcze kilka słów o innym ciekawym sposobie wykorzystania GeoGebry w kontekście konstrukcji. Chodzi mi o konstrukcje tzw. niewykonalne i przybliżone. Spotykałam się z tym, że uczniowie po wykonaniu na kartce papieru konstrukcji przybliżonej (na przykład siedmiokąta foremego) kompletnie nie rozumieli różnicy pomiędzy tą konstrukcją a innymi, tymi nieprzybliżonymi. W takich przypadkach również gorąco polecałabym użycie GeoGebry, aby pokazać uczniom to, co na pierwszy rzut oka niewidoczne, a bez powiększenia na komputerze wręcz niemożliwe do zobaczenia (czyli niedokładności konstrukcji przybliżonej, fragmenty rysunku, na których widoczne są luki).



Ryc. 5

Magdalena Żołnierczyk

Nauczycielka matematyki w szkole podstawowej wykorzystująca na co dzień program GeoGebra podczas pracy z uczniem.

AUTOR: KAROLINA KARPIŃSKA

WPŁYW ODZYSKANIA NIEPODLEGŁOŚCI PRZEZ POLSKĘ NA NAUCZANIE MATEMATYKI W SZKOŁACH ŚREDNICH

Niniejszy artykuł zostanie poświęcony omówieniu zmian, jakie zaszły w nauczaniu matematyki w szkołach średnich funkcjonujących na ziemiach polskich po odzyskaniu przez Polskę niepodległości w 1918 roku.

Jedną z największych reform z początku XX wieku, związanych z nauczaniem matematyki w szkołach średnich, był tzw. Program Merański. Został on przygotowany przez Felixa Kleina – matematyka z Getyngi. Program Merański zmieniał ogólną organizację szkolnictwa. Stanowił, iż od 1905 roku będzie miało miejsce równouprawnienie gimnazjów, gimnazjów realnych oraz wyższych szkół realnych. W każdej z tych szkół miało się przykładać jednakową wagę do kształcenia w zakresie przedmiotów zarówno matematyczno-przyrodniczych, jak i filologiczno-historycznych¹. Wszystkim szkołom nadano charakter ogólnokształcący, a ich absolwenci mieli wstępować na studia uniwersyteckie na jednakowych zasadach.

Ogólne cele nauczania według Programu Merańskiego były następujące:

- O1. umiejętność logicznego myślenia,
- O2. umiejętność samodzielnego myślenia,
- O3. umiejętność matematyzowania zjawisk przyrody,
- O4. świadomość, że matematyka odgrywa ważną rolę we wszystkich dziedzinach życia i jest niezbędna dla ludzi i społeczeństwa przemysłowego.

Cele specyficzne:

- S1. kształcenie wyobraźni przestrzennej,
- S2. wyrabianie nawyków myślenia funkcyjnego,
- S3. wiązanie ze sobą różnych zagadnień matematycznych,

- S4. zwracanie uwagi na zastosowania matematyki,
- S5. zachowanie równowagi pomiędzy zastosowaniami matematyki a teorią,
- S6. wspólne podejście do planimetrii i stereometrii,
- S7. nacisk na historię matematyki.

Zalecane metody dydaktyczne:

- M1. metoda genetyczna – „należy wiązać idee, umieścić nową wiedzę z wiedzą już zdobytą w związku nierozłącznym, w końcu powiązać wiedzę z resztą materiału edukacyjnego szkoły bardziej i bardziej, aby połączenie wiedzy było coraz większe, a uczniowie bardziej świadomi”,
- M2. zasada psychologiczna – materiał powinien być dostosowany do przebiegu rozwoju intelektualnego uczniów,
- M3. zasada użyteczności – pokazywanie, że matematyka ma ogromne znaczenie w życiu codziennym.

Program Merański od 1905 roku zaczęto powoli wdrażać do szkół pruskich, również do tych funkcjonujących na ziemiach polskich pod zaborem pruskim. Zdobywał on coraz większą rzeszę zwolenników. Wybrane postulaty Programu Merańskiego wprowadzano też do szkół z polskim językiem wykładowym pod zaborem austriackim. Porównamy teraz programy nauczania matematyki realizowane w roku szkolnym 1908/1909 w polskojęzycznym Gimnazjum im. Mickiewicza we Lwowie (zabór austriacki)² oraz w Gimnazjum Toruńskim z niemieckim językiem wykładowym (zabór pruski)³.

Gimnazjum im. Mickiewicza we Lwowie w roku 1908/1909		Gimnazjum Toruńskie w roku 1908/1909	
Program nauczania matematyki	Liczba godzin tygodniowo	Program nauczania matematyki	Liczba godzin tygodniowo
Klasa VI			
Arytmetyka: Układ miar metrycznych; układ dziesiętkowy liczb; cztery działania arytmetyczne na liczbach całkowitych niemianowanych i mianowanych; podzielność liczb, rozkład liczb na czynniki; ułamki zwykłe Geometria: Zapoznanie się poglądowo z ilościami przestrzennymi. Linia prosta, koło, kąt, linie równoległe, trójkąt	3	Rachunki: Działania arytmetyczne na liczbach całkowitych niemianowanych i mianowanych; niemieckie miary, wagi i monety wraz z ćwiczeniem zapisu dziesiętnego i prostymi rachunkami w systemie dziesiętnym; przygotowanie do rachunków na ułamkach	4
Klasa V			
Arytmetyka: Miara i wielokrotność; działania na ułamkach zwykłych; zamiana ułamków dziesiętnych na ułamki zwykłe i odwrotnie; stosunki i proporcje; reguła trzech; rachunek procentu prostego Geometria: Osie symetrii odcinków i kątów; przystawanie trójkątów; własności koła, czworoboków i wieloboków	3	Rachunki: Podzielność liczb; rozkład na czynniki; ułamki zwykłe; cztery działania arytmetyczne na liczbach zapisanych w systemie dziesiętnym; proste zadania z wykorzystaniem reguły trzech	4
Klasa IV			
Arytmetyka: Cztery działania arytmetyczne na liczbach całkowitych i ułamkach; podnoszenie liczb do kwadratu i wyciąganie drugiego pierwiastka; liczby przybliżone i działania na nich Geometria: Równość, zamiana i podział figur; pomiar linii i powierzchni; podobieństwo figur	3	Rachunki i matematyka: Rachunki na ułamkach dziesiętnych; prosta i złożona reguła trzech z liczbami całkowitymi i ułamkami; zadania związane z życiem obywatelskim, najprostsze przypadki obliczania procentów, odsetek i rabatów; przygotowanie do geometrii; ćwiczenia w użyciu cyrkla i linijki; nauka o liniach prostych, kątach i trójkątach	4
Klasa III			
Równania stopnia pierwszego o jednej i kilku niewiadomych; równania stopnia drugiego i trzeciego; podnoszenie liczb do sześciądn i wyciąganie trzeciego pierwiastka; reguła trzech złożona, reguła podziału, rachunek procentu składanego; stereometria	5	Klasa III Niższa Matematyka: Rachunki na liczbach bezwzględnych oraz wprowadzenie dodatnich i ujemnych wielkości liczbowych; zadania, które opierają się na rozwiązywaniu równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; rozszerzenie nauki o trójkątach; równoległoboki; cięciwy i kąty w kole; zadania konstrukcyjne	3
–	–	Klasa III Wyższa Matematyka: Powtórzenie działań na ułamkach, które w zapisie mają litery; proporcje; równania pierwszego stopnia z jedną i więcej niewiadomymi; potęgi o wykładnikach będących dodatnimi liczbami całkowitymi; nauka dotycząca koła; równość figur pod względem pola powierzchni; obliczanie powierzchni figur prostoliniowych; zadania konstrukcyjne	3

Gimnazjum im. Mickiewicza we Lwowie w roku 1908/1909		Gimnazjum Toruńskie w roku 1908/1909	
Program nauczania matematyki	Liczba godzin tygodniowo	Program nauczania matematyki	Liczba godzin tygodniowo
Klasa II			
Algebra: Cztery działania; liczby ujemne; podzielność, miara, wielokrotność, ułamki, proporcje, równania pierwszego stopnia o jednej i kilku niewiadomych Geometria: Planimetria	4	Klasa II Niższa Matematyka: Potęgi, pierwiastki, logarytmy; obliczenia z uży- ciem czterocyfrowych tablic logarytmicznych; proste równania kwadratowe z jedną i dwiema niewiadomymi; podobieństwo, proporcjonalność linii prostych w kole, złoty podział odcinka; wielokąty foremne; obwód i pole powierzchni koła, zadania związane z tymi zagadnieniami; zadania konstrukcyjne	4
–	–	Klasa II Wyższa Matematyka: Równania, w szczególności równania kwadra- towe, z większą liczbą niewiadomych; punkty harmoniczne, promienie kół, sieczne; zastosowania algebry w geometrii; zadania konstrukcyjne, zwłaszcza te z wykorzystaniem analizy algebraicznej (rozwiązaniem zadania konstrukcyjnego metodą analizy algebraicznej nazywano następujący schemat rozumo- wania: nieznane linie figury najpierw obliczane są za pomocą rachunków algebraicznych, następnie konstruuje się znalezione wyrażenia arytmetyczne i wykorzystuje je do skonstruowania całej figury); goniometria; proste obliczenia dotyczące rozwią- zywania trójkątów	4
Klasa I			
Potęgi, pierwiastki, logarytmy, rozwiązywanie równań pierwszego stopnia; powtórzenie planimetrii i stereometrii	3	Klasa I Niższa Matematyka: Ciągi arytmetyczne i geometryczne; rachunki obywatelskie; równania kwadratowe; rozszerzenie pojęcia liczby na liczby zespolone; zadania Apoloniusza według starej metody i inne zadania konstrukcyjne; rozwiązywanie trójką- tów, korzystając z sumy i różnicy ich boków, promieni okręgów stycznych, kątów i wysokości; kluczowe twierdzenia o wza- jemnym położeniu punktów, linii i płaszczyzn w przestrzeni; obliczanie pól powierzchni i objętości graniastopuła, ostrosłu- pa, walca, stożka i kuli; powtórzenie wiadomości z poprzed- nich klas	4
–	–	Klasa I Wyższa Matematyka: Twierdzenie dwumianowe dla wykładników będących całkowitymi liczbami dodatnimi; równania wyż- szych stopni, które można sprowadzić do równań kwadrato- wych; podstawowe informacje o współrzędnych, równanie linii prostej, koła i stożkowych; zadania konstrukcyjne; powtórzenie wiadomości stereometrycznych; wprowadzenie pewnych wzó- rów trygonometrii sferycznej w odniesieniu do Ziemi i Nieba; powtórzenie wiadomości z klas poprzednich wedle wytycznych Mehlera (to znaczy wg zagadnień umieszczonych w podręcz- niku: <i>Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen</i> F.G. Mehlera, Berlin 1869)	4

Gimnazjum im. Mickiewicza we Lwowie i Gimnazjum Toruńskie były szkołami sześcioklasowymi. We Lwowie nauka w każdej klasie trwała jeden rok. W Toruniu klasy III, II i I były dwuletnie, dlatego zakres omawianego materiału był szerszy.

Porównując powyższe programy nauczania, można zauważyć, że w roku szkolnym 1908/1909 Gimnazjum im. Mickiewicza we Lwowie i Gimnazjum Toruńskie realizowały kilka postulatów Programu Merańskiego. W Gimnazjum we Lwowie realizowano postulat wspólnego podejścia do planimetrii i stereometrii (postulat S.6.). Najpierw zapoznawano uczniów z podstawowymi obiektami stereometrycznymi, a następnie na ich bazie wprowadzano

podstawowe pojęcia planimetryczne. Geometrię omawiano już w najniższej klasie – VI. W Gimnazjum Toruńskim ten postulat Programu Merańskiego nie był realizowany. Naukę geometrii rozpoczynano w klasie IV od omówienia podstawowych pojęć planimetrycznych. Stereometrię wprowadzano dopiero w najwyższej klasie – I.

W Gimnazjum Toruńskim przywiązywano dużą wagę do zadań konstrukcyjnych. Pozwalało to realizować postulaty: wyrabiania umiejętności logicznego myślenia (O.1.), kształcenia wyobraźni przestrzennej (S.1.), stosowania metody genetycznej w nauczaniu (M.1.) oraz wyrabiania nawyków myślenia funkcyjnego (S.2.)

– obserwowania, w jaki sposób zmiana jednych wielkości wpływa na zmianę innych oraz szukania relacji łączącej pewne wielkości. Zadania konstrukcyjne w Gimnazjum Toruńskim często były bardzo złożone, wieloetapowe i wymagały dobrej znajomości twierdzeń geometrycznych. Przykładowe zadanie:

Zadanie⁴

Skonstruuuj czworokąt, znając jego dwa stykające się boki, stosunek dwóch pozostałych boków oraz obie przekątne.

W programie nauczania Gimnazjum im. Mickiewicza we Lwowie nie zostały wymienione konstrukcje geometryczne. Wyobrażenia przestrzenna (S.1.) była tam kształtowana w trakcie omawiania wszelkich zagadnień stereometrycznych, umiejętność logicznego myślenia (O.1.) – przy analizowaniu twierdzeń matematycznych i przeprowadzaniu dowodów. Trudno powiedzieć, czy w Gimnazjum we Lwowie był realizowany postulat wyrabiania nawyków myślenia funkcyjnego.

W obu szkołach zwracano uwagę na zastosowanie matematyki w życiu codziennym (O.4., M.3.) – przede wszystkim na wykorzystanie reguły trzech oraz procentów do rozwiązywania zadań związanych z rachunkami kupieckimi oraz obliczaniem wysokości rent i emerytur. W Gimnazjum Toruńskim ukazywano też zastosowanie matematyki w chemii i metaloznawstwie (**Zadanie⁵**. Ile soli należy dodać do kilograma 10% solanki, aby otrzymać roztwór 25%?), fizyce (**Zadanie⁶**. O 7 rano z Berlina wyruszył pociąg osobowy, w ciągu każdej sekundy pokonywał on 6 mil. O 8 rano w tym samym kierunku wyruszył pociąg pośpieszny i w ciągu każdej sekundy pokonywał 9 mil. Kiedy i gdzie te pociągi się spotkają?), grach loteryjnych i hazardowych (**Zadanie⁷**. W loterii o 90 losach 5 losów wygrywa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięty przez nas los wygra?) czy astronomii i geografii (**Zadanie⁸**. Pozorny obieg Księżyca wokół Ziemi trwa 27 dni 7 godzin 34 minuty 5 sekund, pozorny obieg Słońca wokół Ziemi trwa 365 dni 5 godzin 48 minut 49 sekund. Jak długi jest miesiąc synodyczny, tzn. czas między kolejnymi nowiami Księżyca?).

NAUCZANIE MATEMATYKI W POLSKICH SZKOŁACH ŚREDNICH PO 1918 ROKU

Tuż po odzyskaniu przez Polskę niepodległości Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego przygotowało nowe zasady organizacji szkolnictwa. Podstawą było tutaj stwierdzenie: *przyszła szkoła polska nie może być kopią jakiegokolwiek szkoły obcej, a w szczególności rosyjskiej, pruskiej czy austriackiej, ale winna być tworem nowym, dostosowanym do potrzeb współczesnego życia polskiego, a pomyślanym zgodnie z postępowaniem pedagogicznym⁹*. Ustalono, że gimnazja będą składać się z trzyletniego gimnazjum niższego i pięcioletniego gimnazjum wyższego zróżnicowanego na cztery wydziały: matematyczno-przyrodniczy, humanistyczny, humanistyczny z łaciną oraz klasyczny.

Nauczanie matematyki w gimnazjum wyższym miało cztery podstawowe cele¹⁰:

1. Wdrożenie ucznia do ścisłego rozumowania,
2. Przyzwyczajanie ucznia do dostrzegania związków funkcjonalnych zachodzących pomiędzy znanymi mu zjawiskami oraz do matematyzowania zjawisk przyrody.
3. Rozwijanie intuicji geometrycznej.
4. Wykorzystywanie matematyki do rozwiązywania zadań z nauk pokrewnych matematyce i do rozwiązywania zadań z życia codziennego.

Widoczne jest, że cele nauczania przygotowane przez Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego były zbliżone do wybranych postulatów Programu Merańskiego.

Oto ramowy program nauczania dla polskiego gimnazjum wyższego, od najniższej klasy – V do najwyższej – I¹¹:

Klasa V (4 godziny tygodniowo)

Algebra: wyrażenia algebraiczne, jednomiany i wielomiany, zależność funkcjonalna (zmienne zależne i niezależne). Geometria: przystawianie figur płaskich, figury symetryczne, podstawowe konstrukcje geometryczne (np. konstrukcje trójkąta, gdy dane są jego boki, konstrukcja prostej prostopadłej do danej)

Klasa IV (4 godziny tygodniowo)

Algebra: równania pierwszego stopnia z jedną i dwiema niewiadomymi, funkcje liniowe, pierwiastki kwadratowe wraz z wprowadzeniem liczb niewymiernych, równania kwadratowe. Geometria: koło, linie w kole, czworokąty wpisane i opisane na kole, zadania konstrukcyjne, wielokąty równoważne (tj. mające równe pola powierzchni), podstawowe pojęcia stereometryczne (położenie linii prostych i płaszczyzn w przestrzeni, kąt dwuścienny i trójsścienny)

Klasa III (3 godziny tygodniowo)

Algebra: trójmian kwadratowy: miejsca zerowe, minima i maksima, graficzne rozwiązywanie nierówności kwadratowych, ciągi arytmetyczne i geometryczne. Geometria: obliczanie pól wielokątów, rzut ukośny równoległy (rzuty ostrosłupów i graniastosłupów)

Klasa II (3 godziny tygodniowo)

Algebra: funkcja wykładnicza i logarytmiczna, własności potęg i logarytmów. Geometria i trygonometria: obliczanie pól powierzchni wielościanów, obliczanie objętości graniastosłupów, funkcje trygonometryczne dowolnego kąta (wykresy, okresowość funkcji trygonometrycznych, wzory redukcyjne). Pojęcie granicy i jego zastosowania: ciągi liczbowe zbieżne i rozbieżne, obliczanie długości okręgu i pola koła, obliczanie pól powierzchni i objętości brył obrotowych

Klasa I (3 godziny)

Powtórzenie i rozszerzenie materiału omawianego w poprzednich klasach

Najważniejsze zmiany związane z nauczaniem matematyki dotyczyły wprowadzenia do programów nauczania funkcji, granic oraz elementów geometrii wykreślnej. Z programów nauczania usunięto natomiast złożone konstrukcje geometryczne oraz geometrię sferyczną.

PIERWSZE POLSKIE MATURY Z MATEMATYKI W II RZECZYPOSPOLITEJ

Pierwsze polskie matury przeprowadzono już w 1919 roku. Przykładowo Gimnazjum im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu zostało przejęte przez Polaków 1 kwietnia 1919 roku. W grudniu tego roku przeprowadzono w nim pierwszą polską maturę, jednakże wciąż była ona w języku niemieckim¹². Pierwsza matura w języku polskim została przeprowadzona w tej szkole 4 czerwca 1920 roku. Zadania z matematyki były wówczas następujące¹³:

Zadanie 1

Żelazna kula wydrążona o ciężarze 30 kg zanurza się w wodzie do połowy; obliczyć grubość ściany kuli, przyjmując ciężar właściwy żelaza $s = 7,7$.

Zadanie 2

Suma sześciu pierwszych wyrazów postępu geometrycznego jest równa 189, a suma następnych sześciu 12 096. Jaki to postęp?

Zadanie 3

Rozwiązać równania:

$$\begin{aligned} 5 \sin x + \sin y &= 4, \\ 3(5 \sin x) - 2(3 \sin y) &= 5. \end{aligned}$$

Zadanie 4

Przez trzy punkty:

$$A = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, B = \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ i } C = \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

przeprowadzić koło (napisać jego równanie), a następnie obliczyć kąt, jaki tworzą ze sobą styczne poprowadzone w punktach A i B.

Przez kolejne pięć lat postać egzaminów maturalnych z matematyki w Gimnazjum im. Karola Marcinkowskiego była bardzo podobna do postaci matur przeprowadzanych w zaborze pruskim pod koniec XIX wieku i na początku XX wieku. Zestawy maturalne składały się z czterech zadań: zadania arytmetyczno-algebraicznego (często dotyczyło ono ciągów arytmetycznych i geometrycznych, czasem było też związane z wyznaczaniem kapitału, obliczaniem zysku, zastosowaniem matematyki w fizyce oraz rozwiązywaniem równań), planimetrycznego (zazwyczaj analitycznego), stereometrycznego (związanego z obliczaniem objętości podstawowych brył: kuli, stożka i ostrosłupa) oraz trygonometrycznego (zazwyczaj wymagało ono rozwiązania trójkąta).

W latach 1926–1929 na pisemnych maturach z matematyki uczniowie Gimnazjum im. Karola Marcinkowskiego otrzymali już tylko dwa zadania. Przykładowo w roku szkolnym 1926/1927 na egzaminie maturalnym z matematyki dla typu klasycznego pojawiły się następujące¹⁴:

Zadanie 1

Pierwsze wyrazy postępu arytmetycznego i geometrycznego są równe 4, drugie wyrazy są sobie równe, zaś trzeci wyraz postępu geometrycznego jest iloczynem liczb

$$\frac{25}{10}$$

i trzeciego wyrazu postępu arytmetycznego. Co to za postępy?

Zadanie 2

Promienie podstaw prostego stożka ściętego wynoszą: $R = 5$ cm, $r = 3$ cm, bok tej bryły jest nachylony do większej podstawy pod kątem $\varphi = 28^\circ 21'$. Oblicz objętość i pobocznice tej bryły.

Podobną formę przybrały matury z matematyki w innych szkołach, np. w Państwowym Gimnazjum Klasycznym i Humanistycznym w Toruniu w roku 1926/1927 uczniowie typu klasycznego otrzymali zadania¹⁵:

Zadanie 1

Dany jest układ:

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x - 24, \\ y &= mx + 1. \end{aligned}$$

Wyznaczyć m tak, aby układ posiadał jedną parę pierwiastków.

Zadanie 2

Różnica dwóch równoległych boków trapezu równoramiennego wynosi 15 m, suma ich kwadratów 425 m², a bok nierównoległy jest średnią geometryczną obu boków równoległych. Oblicz boki, kąty i przekątną trapezu.

Porównując egzaminy maturalne z matematyki przeprowadzone w Poznaniu w latach 1925–1929¹⁶ i w Toruniu w latach 1928–1933^{17–22} z egzaminami, które odbyły się wcześniej na terenach I Rzeczypospolitej znajdujących się pod zaborem pruskim, otrzymujemy następujące wnioski:

1. Po odzyskaniu przez Polskę niepodległości uczniowie na egzaminach maturalnych otrzymywali dwa zadania. Nie było wyraźnego wskazania, których działów mają one dotyczyć. Pojawiały się zadania planimetryczne (analityczne), stereometryczne, trygonometryczne (zazwyczaj związane z rozwiązywaniem trójkątów), zadania dotyczące rozwiązywania równań i nierówności metodą rachunkową i graficzną, rozwiązywania równań z parametrem, wyznaczania miejsc zerowych funkcji oraz zadania związane z obliczeniami obywatelskimi (obliczaniem kapitału, zysku, straty, wysokości odsetek itp.). Wśród nich były pewne typy zadań, które wyjątkowo często pojawiały się na maturach w szkołach w Toruniu i Poznaniu. W Toruniu w większości zestawów maturalnych było zadanie związane z rozwiązywaniem równania z parametrem. W Poznaniu bardzo często pojawiało się zadanie dotyczące ciągów arytmetycznych i geometrycznych. Ponadto w obu szkołach często były zadania związane z wyznaczaniem objętości i pola powierzchni brył obrotowych. W związku z tym uczniowie mogli się spodziewać, z jakimi typami zadań przyjdzie im się zmierzyć na maturze.

Przez kilkanaście lat po odzyskaniu niepodległości w Polsce dopiero opracowywano zasady przeprowadzania egzaminów maturalnych, stąd duże zróżnicowanie związane z tematyką zadań.

2. W odrodzonej Polsce każda szkoła przeprowadzała egzaminy maturalne w innych terminach. Zadania były przygotowywane indywidualnie dla każdej szkoły. Tym samym została tu zachowana tendencja z czasów zaborów.

3. Po odzyskaniu przez Polskę niepodległości na egzaminach maturalnych nie było zadań konstrukcyjnych, podczas gdy zadania te bardzo często pojawiały się na maturach przeprowadzanych w czasach zaborów. Zadania konstrukcyjne na terenach dawnej I Rzeczypospolitej zagarniętych przez Prusy wymagały dokonania złożonych konstrukcji geometrycznych, opierających się zazwyczaj na wykorzystaniu kilku twierdzeń.

4. Na egzaminach maturalnych przeprowadzanych w Toruniu i Poznaniu po 1925 roku pojawiały się typy zadań, które były już wcześniej na maturach w XIX i początku XX wieku. Trzeba tu jednak zwrócić uwagę na dwie rzeczy:

1) Już w XIX wieku pojawiały się zadania dotyczące rozwiązywania równań z parametrem. W XIX wieku w zadaniach tego typu nigdy nie wymagano przeprowadzenia dyskusji

związanej z liczbą rozwiązań. Było to spowodowane tym, że wówczas równania zawsze rozwiązywano w liczbach zespolonych.

Na maturze z matematyki przeprowadzonej w Toruniu w roku 1929/1930 uczniowie otrzymali polecenie²³:

Zadanie

Rozwiąż układ:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 &= 36, \\ y &= 2x - k. \end{aligned}$$

W zależności od parametru k rozważyć, kiedy układ nie będzie posiadał pierwiastków, kiedy będzie miał jedną, a kiedy dwie pary pierwiastków.

Postać tego zadania pokazuje, że po odzyskaniu niepodległości z programów nauczania w Toruniu usunięto liczby zespolone. Równania, nierówności czy układy równań rozwiązywano już w liczbach rzeczywistych.

- 2) W XIX wieku pojawiały się na maturach zadania związane z rozwiązaniem równań czy nierówności, jednakże w poleceniach nie było wymagane przeprowadzenie rozwiązania metodą graficzną. Inaczej było w XX wieku. Przykładowe zadanie:

Zadanie²⁴

Rozwiąż nierówność ułamkową:

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 + x - 5} > 0$$

rachunkiem i za pomocą wykresu.

Graficzne przedstawienie równań i nierówności, a właściwie graficzne przedstawienie zależności funkcyjnych stało się obowiązkowym punktem programów nauczania dopiero kilka lat po wprowadzeniu Programu Merańskiego w 1905 roku. Wtedy zależności funkcyjne, ich graficzne przedstawienie oraz rozwiązywanie równań i nierówności metodą graficzną na stałe zagościły w programach nauczania szkół średnich²⁵.

5. Na egzaminach maturalnych przeprowadzanych na ziemiach polskich zagarniętych przez Prusy pojawiały się zagadnienia, których w odrodzonej Polsce już nie było. Przykładem są tutaj ciągi arytmetyczne drugiego rzędu. Przykładowe zadanie maturalne:

Zadanie²⁶

W ciągu arytmetycznym drugiego rzędu suma pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu jest równa 21, suma drugiego i czwartego wyrazu jest równa 37, a suma trzeciego i piątego wyrazu jest równa 59. Ponadto n -ty wyraz tego ciągu jest równy 612. Jaka jest suma n pierwszych wyrazów tego ciągu?

11 marca 1932 roku wprowadzono w Polsce reformę jędrzejewiczowską, na mocy której szkoła średnia składała się z czteroletniego gimnazjum i dwuletniego liceum (trzy typy liceów: humanistyczne, matematyczno-przyrodnicze i klasyczne). Na maturach z matematyki w dalszym ciągu były dwa zadania.

Bibliografia:

1. Stahl N.M., *Felix Klein Vorstellungen zur Reform des gymnasialen Mathematikunterrichts*, Geschichte der Mathematik, Sommersemester 2005/2006, Prof. Dr. Joachim Hilgert, s. 17.
2. *Sprawozdanie Dyrekcji Gimnazjum im. Mickiewicza we Lwowie za rok szkolny 1908/9*, Lwów 1909.
3. *Königliches Gymnasium und Realgymnasium zu Thorn*, Thorn 1909.
4. *Königliches Gymnasium und Realgymnasium zu Thorn*, Thorn, 1907, s. 9.
5. Bardey F., *Methodisch geordnete Aufgabensammlung*, Leipzig 1888, s. 133, z. 177.
6. Bardey F., *Methodisch geordnete Aufgabensammlung*, Leipzig 1888, s. 138, z. 242.
7. Bardey F., *Methodisch geordnete Aufgabensammlung*, Leipzig 1888, s. 290, z. 34.
8. Bardey F., *Methodisch geordnete Aufgabensammlung*, Leipzig 1888, s. 153, z. 396.
9. Wuczyńska K., *Programy nauczania matematyki w szkołach średnich w okresie międzywojennym*, [w:] Wiśław W. (red.), *Dzieje Matematyki Polskiej*, Wrocław 2013, s. 254.
10. *Program Gimnazjum Państwowego*, Wydział Humanistyczny, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, wyd. 5. Lwów 1931, s. 67.
11. Tamże, s. 67–72.
12. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu za 1-sze dziesięciolecie zakładu w niepodległej i wolnej Ojczyźnie (1919–1929)*, Poznań 1930, s. 72.
13. Tamże, s. 72–73.
14. Tamże, s. 78–79.
15. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum Klasycznego i Humanistycznego w Toruniu za rok szkolny 1926/27*, Toruń 1927.
16. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu za 1-sze dziesięciolecie zakładu w niepodległej i wolnej Ojczyźnie (1919–1929)*, Poznań 1930.
17. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za rok szkolny 1927/28*, Toruń 1928.
18. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za rok szkolny 1928/29*, Toruń 1929.
19. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za rok szkolny 1929/30*, Toruń 1930.
20. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za rok szkolny 1930/31*, Toruń 1931.
21. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za rok szkolny 1931/32*, Toruń 1932.
22. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za rok szkolny 1932/33*, Toruń 1933.
23. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za rok szkolny 1929/30*, Toruń 1930, s. 36–37.
24. Tamże, s. 35.
25. Karpińska K., *Teaching thinking in terms of functions – fulfilling the fundamental idea of Merano Programme in the Torun Classic Gymnasium in early twentieth century*, [w:] „Technical Transactions”/ „Czasopismo Techniczne” tom 112, 2-NP (20)/2015.
26. Prace maturalne z matematyki uczniów Gimnazjum w Inowrocławiu z 1869 roku. Ze zbiorów Biblioteki I Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kasprzowicza w Inowrocławiu, Inowrocław 1869.

Karolina Karpińska

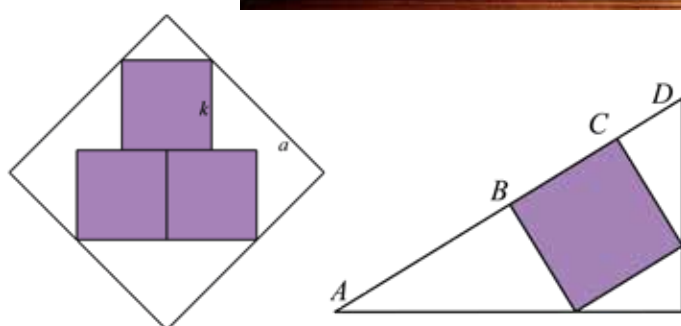
Absolwentka matematyki na UMK w Toruniu, doktorat z historii matematyki, zajmuje się historią edukacji matematycznej. karolinakarpinska001@gmail.com

AUTOR: MIROSLAW MAJEWSKI

MATEMATYKA ZE ŚWIĄTYNI (CZ. 2)

W „Matematyce” z maja 2018 opisałem pokrótce genezę japońskich tablic matematycznych, tzw. sangaku. Tym razem chciałbym zwrócić uwagę na pewne specyficzne cechy tych tablic i problemów matematycznych na nich namalowanych. Na załączonym zdjęciu mamy pokazaną jedną z licznych tablic sangaku (fot. E. Hirotaka). Jak zauważył kiedyś sam Ebisui Hirotaka, tablice sangaku zawierają rysunki. Nie są to

konstrukcje geometryczne. Przeglądając setki sangaku, nigdzie nie zauważyłem nawet sugestii, aby cokolwiek skonstruować. To może oznaczać, że spojrzenie japońskich matematyków na problemy matematyczne było w pewnym stopniu jednostronne – policz coś lub wyprowadź wzór. Zachodni entuzjasta sangaku może również zapytać – a jak to skonstruować? Kiedy zaczynamy mówić o konstrukcjach, to automatycznie pojawia się pytanie, co było punktem wyjścia do konstrukcji? Popatrzmy, jak to wygląda na konkretnym przykładzie.



Problem 1

Mamy trzy kwadraty o boku k wpisane w większy kwadrat o boku a . Wyliczyć wartość k w zależności od wartości a .

To tyle z oryginalnego sangaku. Zachodni matematyk może w tym miejscu zapytać – a jak mogę skonstruować większy kwadrat, mając dane mniejsze? Można postawić również inne pytanie – jak możemy skonstruować trzy małe kwadraty, mając zadany większy? Takie pytania znacznie wzbogacają nasze spojrzenie na problem matematyczny i pozwalają zauważyć wiele innych, dodatkowych zależności.

Problem 2

Mamy kwadrat wpisany w trójkąt prostokątny, tak że jeden z boków kwadratu leży na przeciwprostokątnej natomiast dwa wierzchołki kwadratu leżą na przyprostokątnych. Udowodnić, że $AB \times CD = BC^2$.

Tym razem pojawia się nam jeszcze jedna możliwość, której nie mieli do dyspozycji matematycy japońscy. Ilustrację do tego problemu możemy skonstruować w dowolnym programie do tzw. geometrii dynamicznej i poruszając odpowiednimi punktami możemy sprawdzić, że dowodzona tu własność jest prawdziwa w każdym trójkącie prostokątnym. Co więcej, przy okazji możemy odkryć kilka innych zależności, np., jaki jest związek długości boków trójkąta z bokiem kwadratu?

To tyle oryginalnych problemów z tablic sangaku. O wielu innych opowiemy sobie przy najbliższej okazji.

Mirosław Majewski

Matematyk, geometra z wykształcenia, autor poszukujący związków geometrii ze sztuką i architekturą.

AUTOR: KAROLINA BIŃKOWSKA

RELAKS DLA GŁOSU



Przewlekłe choroby narządu głosu są jedną z pięciu najczęściej występujących chorób zawodowych w Polsce. Obejmują 9,7% wszystkich pacjentów z chorobami zawodowymi. Według badań Instytutu Pracy w 90% przypadków dotyczą nauczycieli. Do przyczyn zaburzeń głosu należą przede wszystkim: praca w niekorzystnych warunkach (głośnych lub klimatyzowanych pomieszczeniach), nadmierny wysiłek głosowy oraz ciągły pośpiech i stres. Przyczyn tych, z racji wykonywanego zawodu, nie sposób wyeliminować. W walce ze stresem pomocne mogą być różne techniki relaksacyjne:

- ćwiczenia oddechowe,
- ćwiczenia rozluźniające mięśnie,
- śmiechoterapia (śmiech to gimnastyka dla organizmu i cudowny masaż naszych narządów).

Propozycje ćwiczeń oddechowych:

- Jedną dłoń kładziemy na brzuchu tuż pod żebrami, drugą na klatce piersiowej. Następnie bierzemy powolny, głęboki wdech nosem, pozwalając, aby brzuch wypychał rękę, która się na nim znajduje (ręka, która jest na klatce piersiowej nie powinna się poruszać). Wydech wykonujemy ustami (ręka na brzuchu wraca do pozycji wyjściowej). Powtarzamy od 4 do 10 razy.
- Oddychanie przez słomkę (pomaga w pozbyciu się napięcia, wzmocnieniu okolic brzucha i przepony, poprawia i wydłuża wydech). Należy przygotować słomkę (im większa średnica, tym lepiej). Wygodnie stoimy lub siedzimy. Słomkę wkładamy między wargi. W takiej pozycji trzymamy słomkę i wykonujemy swobodny wdech nosem, a następnie powoli wydychamy powietrze, kierując strumień powietrza do słomki. Powtarzamy 2 do 5 razy (pamiętamy, by cały czas czuć się swobodnie).
- W swobodnej pozycji leżącej lub siedzącej wykonujemy wdech nosem. Będziemy liczyć w myślach – na „1” wypuszczamy część powietrza ustami; na „2” dobieramy powietrze nosem; na „3” ponownie dobieramy nosem powietrze. Na „4,5,6,7,8,9,10” wydychamy powietrze ustami. Powtarzamy 3–5 razy.

Propozycje ćwiczeń rozluźniających mięśnie:

- Pod wpływem stresu następuje usztywnienie szyi, która kurczy się, powodując specyficzne odchylenie głowy do tyłu i schowanie jej w ramiona (wpływa to na pozycję i pracę naszych innych organów – kręgosłupa, serca, nóg czy rąk). Gdy taka sytuacja jest długotrwała, poja-



wiają się bóle w obrębie karku. Często w bardzo prosty i szybki sposób można poradzić sobie z bólem tych mięśni samemu. Potrzebne będą do tego jedynie dwie piłki do tenisa ziemnego i zwykły plaster tkaninowy z apteki (sprzedawany w rolce). Piłki skleamy ciasno ze sobą za pomocą plastra, tworząc masażer do zwalczania bólu karku i głowy (zdjęcie). Prawidłowe użycie masażera pozwoli rozluźnić mięśnie podpotyliczne odpowiadające za ból. Leżąc na plecach na podłodze (na macie lub dywanie), masażer podkładamy pod potylicę. Leżąc na piłkach głowa dociska je do podłoża, a piłki dociskają nasze mięśnie. Można poruszać delikatnie głową lub nieco zsunąć piłki w dół, aby rozluźnić bezpośrednio mięśnie karku. W pozycji należy pozostać około 3–4 minut – po tym czasie ból bądź sztywność powinny ustąpić.

- Masaż twarzy – opukujemy opuszkami palców wargi, policzki, czoło, nos, podbródek. Uciskamy punkty pod brodą przy kącikach warg, w okolicach stawu żuchwowego i przy skrzydełkach nosa. Gładzimy delikatnie czoło (jednocześnie palcami obu dłoni od środka na zewnątrz), twarz (od grzbietu nosa do uszu i od środka górnej wargi do uszu).
- Śmieszne miny – szybko, swobodnie parskamy, kłaskamy, naprzemiennie wykonujemy wargami dziubek i szeroki uśmiech, przesadnie ziewamy, marszczymy groźnie brwi.

Literatura:

1. Kisiel Mirosław, „Emisja i higiena głosu w pracy dydaktyczno-wychowawczej nauczyciela”
2. <http://everethnews.pl/newsy/5-najczesciej-wystepujacych-chorob-zawodowych-w-polsce/>

Karolina Bińkowska

Pedagog specjalny, neurologopeda, terapeuta pedagogiczny.

GeloVox®

Ochrona gardła i głosu



**TWÓJ GŁOS
W DOBREJ FORMIE**

**NAUCZycIELU
ODZYSKAJ GŁOS!**



WSKAZANIA:

- suchość błony śluzowej gardła,
- odruch chrząkania i chrypka,
- bolesne przełykanie,
- odczucie zalegania w gardle,
- suchy, bezproduktywny kaszel.

ZAPEWNIĄ:

- nawilżenie błony śluzowej jamy ustnej i gardła, dzięki kompleksowi hydrożelowemu z kwasem hialuronowym,
- ochronę i regenerację podrażnionych miejsc, dzięki powłoce nawilżającej,
- złagodzenie objawów, dzięki długotrwałemu działaniu.



ODPOWIEDNI
DLA DIABETYKÓW



OD 6. ROKU
ŻYCIA



BEZ LAKTOZY



BEZ GLUTENU



BEZ DODATKU
CUKRU

www.gelovox.pl



AUTOR: TADEUSZ E. DOROZIŃSKI

BRYŁY

ARCHIMEDESOWE

NIECO INACZEJ



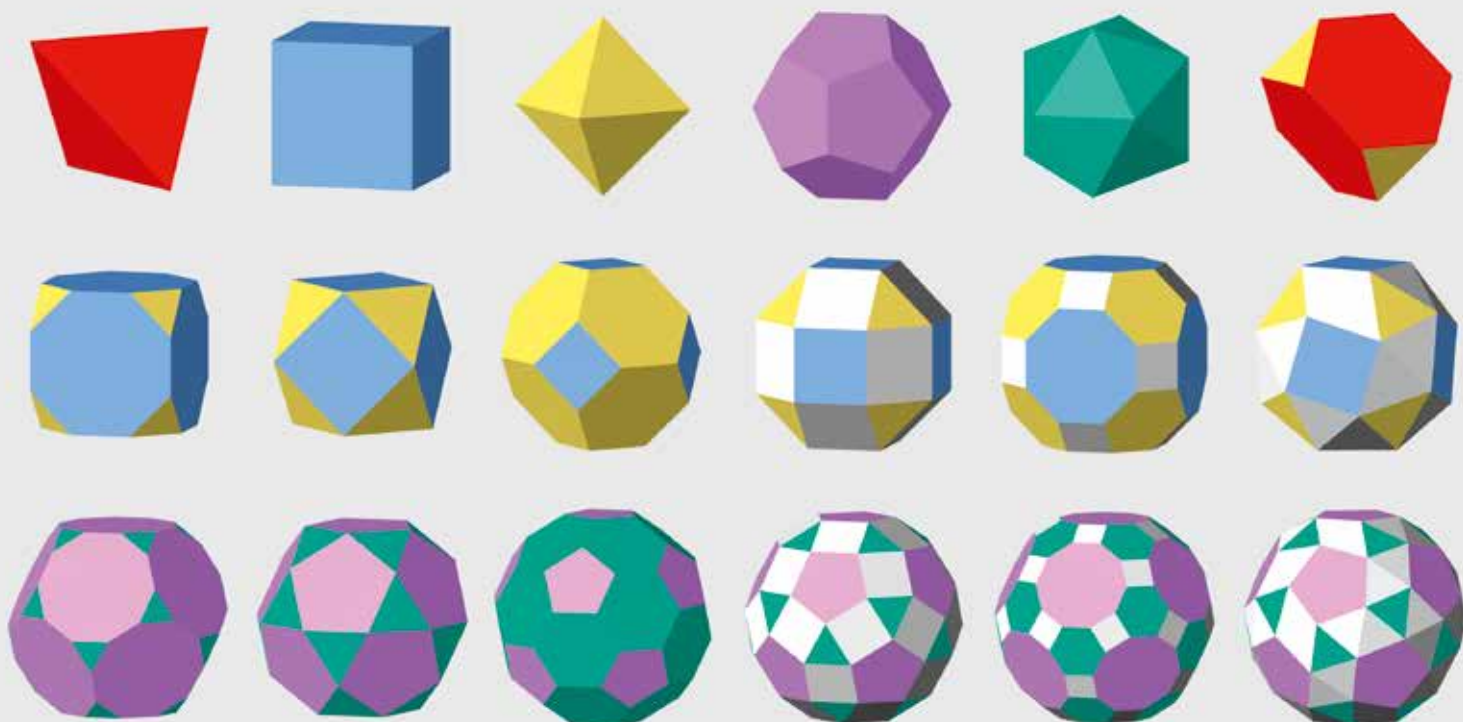
W poprzednim artykule zajmowaliśmy się bryłami platońskimi, pokazując nietypowe wykonanie ich modeli papierowych. Tu pokażemy, jak można wykonać nietypowe modele brył archimedesowych, ale nieco inaczej niż w przypadku brył platońskich. Spróbujemy wykonać je tak, aby uzyskać efekt ażurowości – i coś więcej.

Ryc. 1

Bryły archimedesowe są powiązane z platońskimi, co częściowo pokazuje ryc. 1.

Jeszcze jedna grupa wielościanów związana jest – choć tylko częściowo – z bryłami platońskimi i archimedesowymi. Są to tzw. wielościany Johnsa, których jest 92. We wszystkich ściany są wielokątami foremnymi. Przykładowo piramida czworokątna (J1) jest połową ośmiościanu foremnego, a tzw. kopuła trójkątna (J3) jest połową sześćościanu, zwanego też kuboktaedrem.

Na ażurowych modelach brył archimedesowych będziemy starali się pokazać ich „strukturę wewnętrzną”, przez co uwidoczniemy to, jak można je składać lub budować.

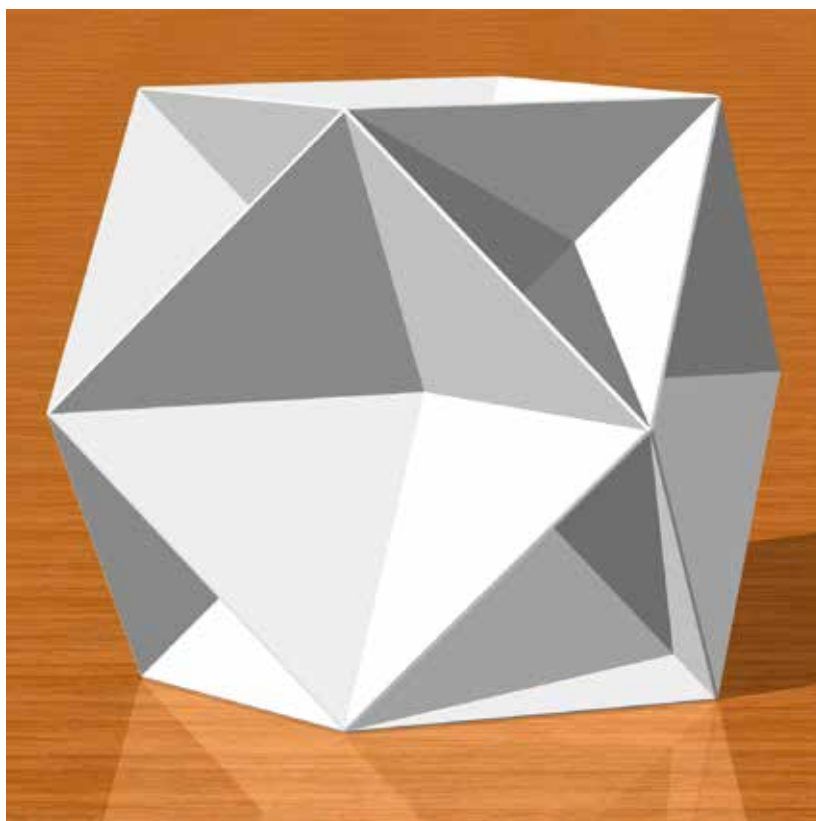


Na ryc. 2 pokazany jest model sześcioośmianu – bez ścian zewnętrznych, uwypuklając jego wnętrze. Widzimy, że sześcioośmian można złożyć z ośmiu czworokątów foremnych i sześciu piramid czworokątnych (J1). Zauważmy, że trójkąty w tym modelu tworzą cztery sześcioboki foremne. Ażurowy model sześcianu ściętego z ryc. 3 pokazuje z kolei, że można go złożyć z ośmiu czworokątów foremnych i z sześciu kopuł czworokątnych (J4). W środku bryły widoczny jest wirtualny sześcian.

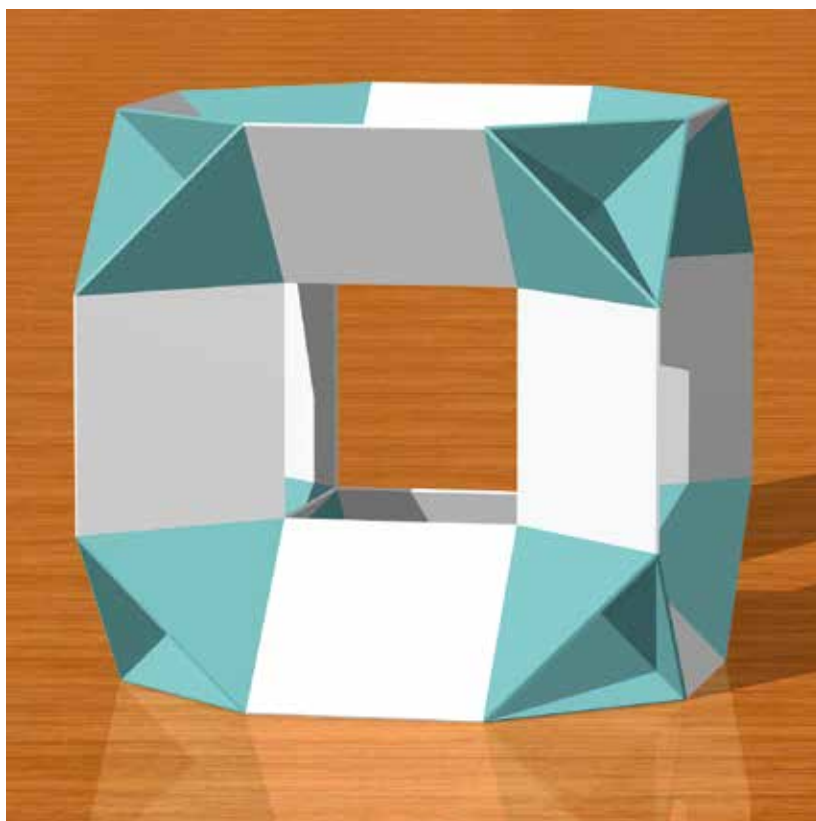
Ale nie wszystkie bryły archimedesowe można tak łatwo rozłożyć na mniejsze części, które są bryłami wspomnianymi na początku. Szczególnie obie bryły skręcone (przycięte) sprawiają problemy pod tym względem. Na rycinach poniżej pokazujemy schematy możliwych do zrobienia modeli ażurowych. Rysunki zostały wykonane przy pomocy programu Stella4D.

Model sześcianoośmianu rombowego małego (ryc. 4) można wykonać z sześciu przecinających się ośmiokątów foremnych (oktagonów), a model ośmianu ściętego (ryc. 5) z sześciu piramid kwadratowych (J1) i dwunastu kwadratów. W środku bryły możemy dostrzec wirtualny ośmian foremny.

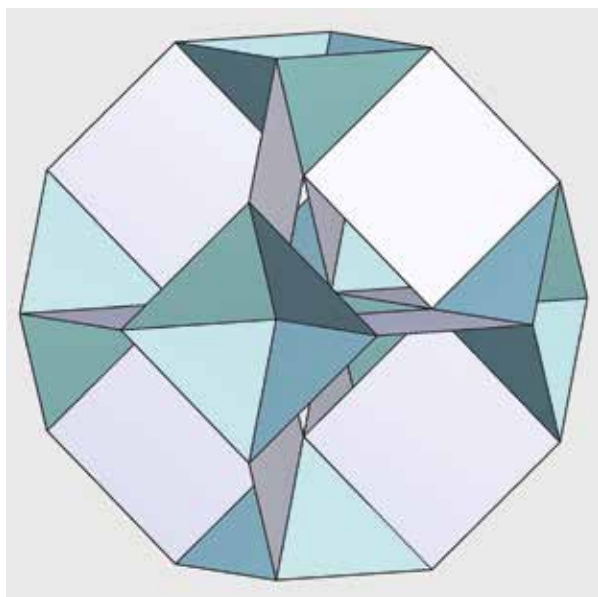
Sześcioośmian rombowy wielki jako model ażurowy (ryc. 6) jest bardziej skomplikowany niż poprzednie, gdyż do jego budowy potrzebujemy trzech rodzajów brył: 12 sześcianów, osiem kopuł trójkątnych (J3) i sześć kopuł czworokątnych (J4). W środku pojawia się wirtualny sześcio-ośmian rombowy mały.



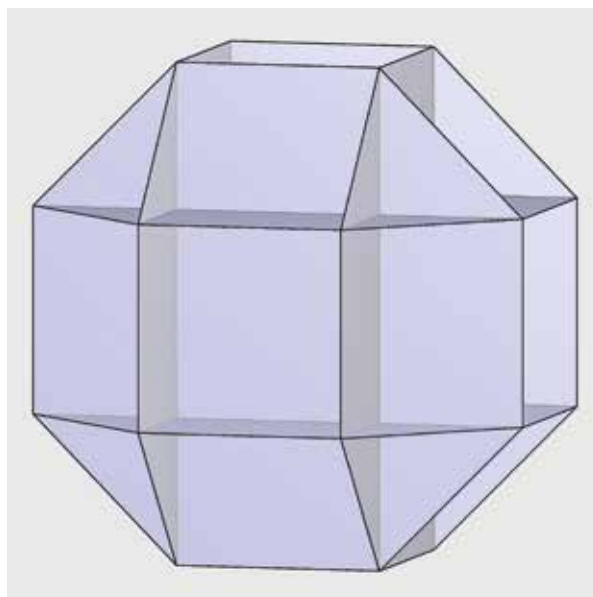
Ryc. 2



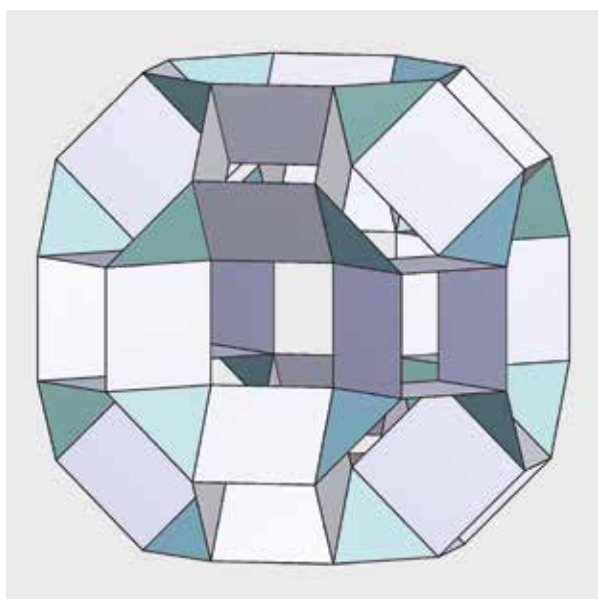
Ryc. 3



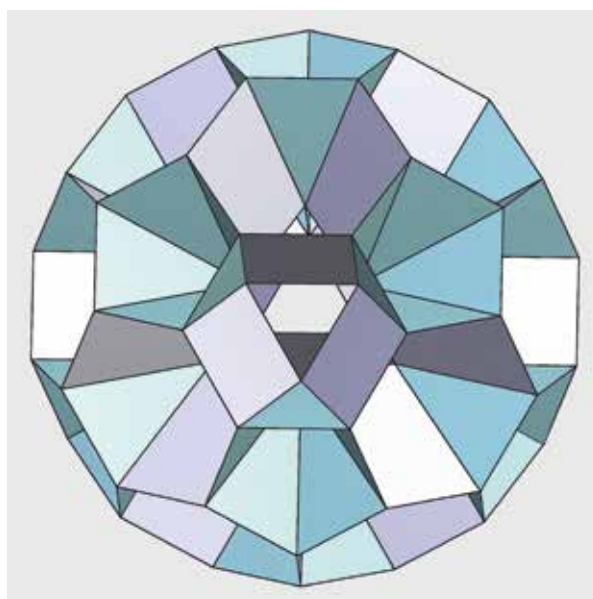
Ryc. 4



Ryc. 5



Ryc. 6



Ryc. 7

Ażurowe modele brył archimedesowych o symetrii dwudziestościanu foremnego (ikosaedrycznej) są trudniejsze w wykonaniu, gdyż czasem musimy stosować w nich zmodyfikowane bryły, a więc bryły, których ściany nie są wielokątami foremnymi.

Na ryc. 7 pokazany jest ażurowy model dwudziestościanu ściętego, który zbudowany jest z 20 zmodyfikowanych kopuł trójkątnych, gdzie zamiast kwadratów mamy prostokąty i 12 piramid pięciokątnych. Ich wymiary są tak dobrane, że w środku pojawia się wirtualny dwudziestościan foremny.

Pytanie: jaka jest wysokość takiej piramidy pięciokątnej?

Wykonywanie takich modeli może nam uświadomić niektóre aspekty związane z bryłami archimedesowymi, nazywane też półforemnymi. Uwiadamiamy przez to ich strukturę, symetrię, regularność i wzajemne relacje.

Zachęcam do wykonania pozostałych modeli.

Czytelnikom posiadającym program Stella mogę na życzenie udostępnić pliki w formacie STEL pokazanych w tym artykule modeli. Również pliki obiektów 3D z poprzednich artykułów chętnie udostępnię. Proszę przesłać mi krótki e-mail.

mgr inż. Tadeusz E. Doroziński

mgr inż. architekt, były pracownik naukowy Politechniki Wrocławskiej.

Na swojej stronie internetowej www.3doro.de zajmuje się głównie

geometrią 3D. Autor poleca też stronę www.geometryka.wordpress.com/

AUTOR: BRONISŁAW PABICH

MAŁY ŚCIĘTY DWUNASTOŚCIAN GWIAZDZISTY



Gdy Johannes Kepler w 1609 r. zbudował dwie formy przestrzenne, które nazwał „uszatymi” (albo „koronkowymi”) ze względu na odstające fragmenty tych form, nie przypuszczał, że był inicjatorem serii wielościanów jednorodnych wklęsłych.

Pierwsza z nich, sześcian uszaty, stworzył, przecinając ze sobą utworzone na ścianach sześcianu oktagramy (ośmiokąty gwiazdziste). Rycina 1 ilustruje rzut tego wielościanu wykonanego w programie Cabri 3D.

Drugą formę – dwunastościan uszaty (koronowy) – Kepler uzyskał z przecięcia dekahgramów (dziesięciokątów gwiazdzistych) skonstruowanych na ścianach dwunastościanu foremego. Na bazie tej formy przestrzennej Keplera skonstruujemy siedemnasty wielościan jednorodny – Small Stellated Truncated Dodecahedron (rys. 5.).



Ryc.1

Konstrukcję naszego wielościanu w programie SketchUp rozpoczynamy od dwunastościanu foremnego. Jedną z jego ścian obracamy narzędziem Obrót o kąt o mierze 36° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny tej ściany, przechodzącej przez jej środek. Krawędzie obu wielokątów przecinają się w dziesięciu punktach, które posłużą nam do utworzenia dziesięciokąta foremnego (ryc. 2), a następnie dziesięciokąta gwiaździstego (dekagramu) – ryc. 3.

Kółka pomalowane na białoczerwono służą do zaznaczania środków pięciokątnej ściany dwunastościanu. Potem je usuniemy. Za pomocą odpowiednich obrotów kopiujemy dziesięciokątne gwiazdy na wszystkie ściany dwunastościanu. Stosując obroty, warto zmieniać za każdym razem położenie układu współrzędnych programu SketchUp, bo to ułatwia dokonanie precyzyjnego obrotu. Otrzymujemy formę przestrzenną, jaką uzyskał Kepler – uszaty dwunastościan – ryc. 4.

Teraz zamykamy tę formę wielokątami, które utworzą się w programie SketchUp same, jeśli wykreślimy odcinki łączące dwa wierzchołki wgłębień koronek środkowosymetrycznych względem środka dwunastościanu. Na ryc. 5 odcinki te zaznaczone są czerwoną linią przerywaną, a dwie ścianki utworzone w ten sposób pomalowano kolorem zielonym.

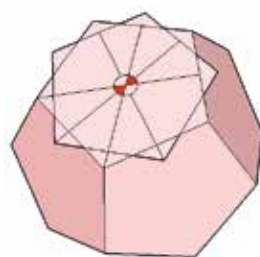
Kreśląc wszystkie takie odcinki, otrzymamy poszukiwany mały ścięty dwunastościan gwiaździsty – ryc. 6.

Wykonanie siatki tego wielościanu nie powinno sprawić kłopotu.

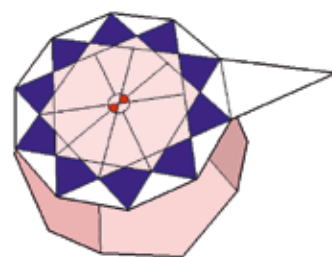
Najpierw sklejamy dwunastościan foremny, a następnie przyklejamy dekagramowe „koronki” wraz z trapezowymi wklęsnięciami.

Jeden z segmentów siatki przedstawia ryc. 7. Wielościan ten dobrze będzie się prezentował w szkolnej kolekcji wielościanów jednorodnych.

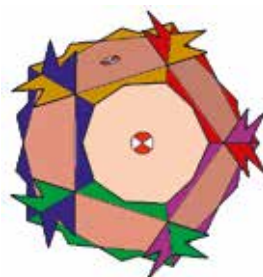
Malując jego ściany, należy pamiętać, by ściany środkowosymetryczne miały ten sam kolor.



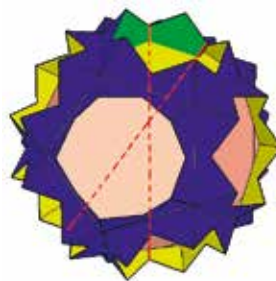
Ryc. 2



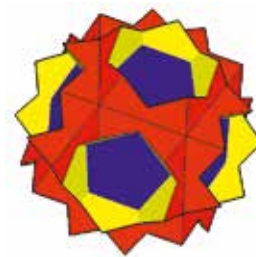
Ryc. 3



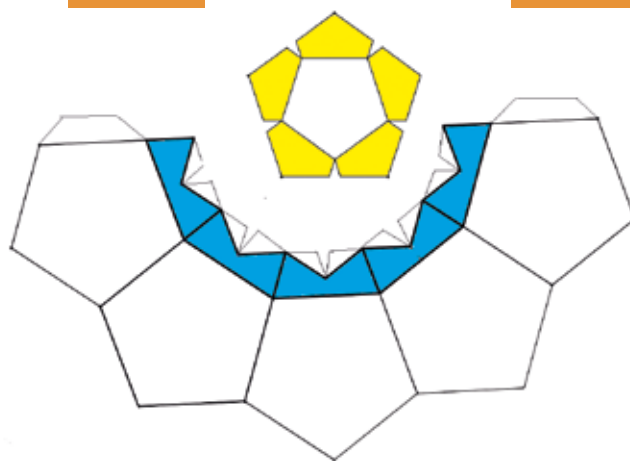
Ryc. 4



Ryc. 5



Ryc. 6



Ryc. 7

Bronek Pabich

Jest członkiem honorowym Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki. Wieloletni nauczyciel ZSZ w Wieliczce i nauczyciel akademicki – popularyzator matematyki, pasjonat programów geometrii dynamicznej (CABRI, GEOGEBRA, SKETCHUP, DPGRAPH), członek SNM. Jego strona internetowa www.pabich.interklasa.pl istnieje od 1998 r. jako pierwsza polska strona matematyczna z dynamiczną wizualizacją geometrii 3D.

Nowość!

W publikacji znajdziesz:

- Szczegółowe omówienie zmian prawnych wchodzących w życie od nowego roku szkolnego
- Instrukcję, jak tworzyć regulamin oceniania nauczycieli w szkole
- Porównanie stanu prawnego sprzed 1 września br. z obowiązującym po 1 września br.
- Informacje na temat tego, jakich terminów należy przestrzegać w zakresie dokonywania oceny pracy
- Wskazówkę, jak powinien wyglądać prawidłowy arkusz obserwacji lekcji
- Wzorcową kartę oceny pracy nauczyciela



Dlaczego warto?



Dzięki publikacji z łatwością wprowadzisz w życie w swojej placówce zmiany prawne



Ułatwisz sobie pracę dzięki sprawdzonym radom naszego eksperta



Wyposażysz się we wzorcowe dokumenty niezbędne do dokonywania oceny pracy nauczyciela



Fot. Maciej Moskwa/Tesiga Documentary

Edukuj i działaj z Polską Akcją Humanitarną.
Zapisz się do kampanii „Niosę Pomoc”
i otrzymaj bezpłatne materiały edukacyjne.

www.pah.org.pl/edukuj

