

AUTOR: MAGDALENA WOJCIECHOWSKA-RYSIAWA

MATEMATYCZNE PODSTAWY TWORZENIA PARKIETAŻY

PROPOZYCJA ZAJĘĆ DODATKOWYCH Z MATEMATYKI

Zajęcia, których przebieg opiszę poniżej, dotyczą szczelnego wypełniania płaszczyzny za pomocą wielokątów foremnych. Ich głównym celem jest odpowiedź na pytanie: w jaki sposób możemy wypełnić płaszczyznę przy pomocy dowolnych wielokątów foremnych? Przedstawię ich podstawowe własności w sposób przystępny dla uczniów zarówno szkoły podstawowej, jak i szkoły średniej.

Szczelne wypełnienie płaszczyzny figurami geometrycznymi, tak aby przylegały, ale nie nachodziły na siebie, nazywamy parkietażami. Takie parkietaże wykorzystuje się jako motyw ozdobny w budownictwie i urządzeniu mieszkań.

Punkt, w którym spotykają się wierzchołki wielokątów, nazywamy wierzchołkiem parkietażu. Typem wierzchołka nazywamy grupę liczb, które stanowią liczbę boków każdego z wielokątów w danym wierzchołku. Ustalmy, że zaczniemy od wielokąta o najmniejszej liczbie boków, obok którego znajduje się wielokąt o mniejszej liczbie boków. Kolejność liczb odczytujemy zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

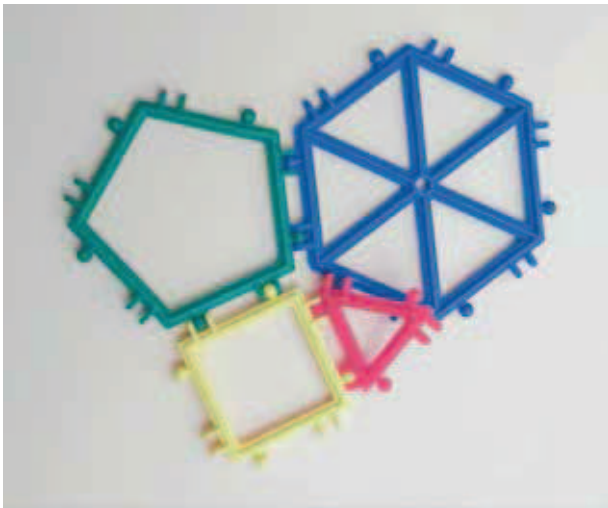
Na początek warto wykorzystać dostępne w sprzedaży klocki w kształcie wielokątów foremnych (Reko, Dienes, Geomag itp.) lub wykonać modele wieloką-

tów foremnych o tej samej długości boków i pozwolić uczniom sprawdzić w praktyce, jakiego typu wielokąty mogą stanowić wierzchołek parkietażu. Na przykład:



▲ Ryc. 1

Dwa kwadraty i trzy trójkąty równoboczne będą wierzchołkiem parkietazu. Natomiast sześciokąt foremny, pięciokąt foremny, kwadrat i trójkąt równoboczny nie będą.



▲ Ryc. 2

Oczywiste jest, że suma kątów w wielokątach wokół danego wierzchołka wynosi 360° . Skupmy się na parkietazach zbudowanych z wielokątów foremnych. Uczniowie potrafią już obliczyć miarę kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym. Przejdźmy zatem do obliczeń.

Ćwiczenie 1

Sprawdź (wykonując odpowiednie obliczenia), czy w wierzchołku parkietazu mogą znaleźć się tylko:

- ośmiokąt foremny, trójkąt równoboczny i kwadrat,
- dwa trójkąty równoboczne, kwadrat i dwunastokąt foremny,
- dwa ośmiokąty foremne i kwadrat,
- piętnastokąt foremny, dziesięciokąt foremny i kwadrat.

Jesteśmy w stanie policzyć miary kątów w wielokątach z ćwiczenia 1 i nie jest to uciążliwe, jednak przed wykonaniem dwóch kolejnych ćwiczeń warto przypomnieć tabelę z przybliżonymi wartościami miar kątów wewnętrznych w wielokątach foremnych (tab. 1).

Zauważmy, że w każdym wierzchołku parkietazu znajdują się co najmniej trzy wielokąty foremne (nie może znajdować się mniej niż trzy wielokąty, bo żaden

▼ Tab. 1. Wielokąt foremny

liczba boków	miara kąta w stopniach
3	60
4	90
5	108
6	120
7	128.57
8	135
9	140
10	144
11	147.27
12	150
13	152.31
14	154.29
15	156
16	157.5
17	158.82
18	160
19	161.05
20	162

wielokąt foremny nie ma kąta półpełnego lub wklęsłego) i co najwyżej sześć wielokątów foremnych – przy czym, jeśli jest ich sześć, to muszą to być trójkąty równoboczne (nie ma wielokąta foremnego, który ma kąt mniejszy niż 60°).

Ćwiczenie 2

Podaj po trzy przykłady typów wierzchołków parkietazu, jeżeli wiemy, że spotykają się w nim:

- trzy wielokąty foremne,
- cztery wielokąty foremne,
- pięć wielokątów foremnych.

Wykonaj obliczenia.

Ćwiczenie 3

Podaj przykłady typów wierzchołków, jeżeli wiemy, że spotykają się w nim:

- dwa rodzaje wielokątów foremnych,
- trzy rodzaje wielokątów foremnych.

Wykonaj obliczenia.

Pozwólmy uczniom na samodzielne wykonanie kilku prób znalezienia wielokątów, które spełnią warunki określone w dwóch powyższych ćwiczeniach. Do znalezienia większej liczby takich wielokątów przydatny może być dynamiczny aplet wykonany w programie



▲ Ryc. 3

GeoGebra. Poniżej zaprezentuję screeny z tego samego apletu, dzięki któremu możemy zwizualizować wypełnianie powierzchni wielokątami foremnymi wokół wierzchołka (ryc. 3).

Powyższy aplet wymaga nieco więcej pracy niż poprzednie, jednak jego wykonanie nadal można uznać za elementarne.

W **Widoku Grafiki** wstawiamy sześć suwaków – pierwszym trzem ustawiamy 3 jako wartość najmniejszą, trzem kolejnym ustawiamy minimalną wartość 2 (jeżeli wartość będzie wynosić 2, dany wielokąt pozostanie niewidoczny). Za pomocą narzędzia **Wielokąt foremny** rysujemy pierwszy wielokąt – ustalamy punkty *A* i *B*, które wyznaczają jeden z boków tego wielokąta, i liczbę *n* (odpowiadającą pierwszemu suwakowi) jako jego liczbę boków. Na boku *BA* budujemy kolejny wielokąt, wybierając jako liczbę boków etykietę kolejnego suwaka (*i*). Na boku *DA* budujemy kolejny wielokąt, tym razem o liczbie boków *j* i analogicznie pozostałe trzy wielokąty foremne o liczbie boków *k*, *l*, *m* na bokach *NA*, *OA* i *PA* odpowiednio, pamiętając o zmianie wartości na trzech ostatnich suwakach na 3, bo przy wartości 2 wielokąt pozostanie niewidoczny.

Usuujemy etykiety wielokątów, odznaczamy punkty w **Widoku grafiki**, zmieniamy kolorystykę.

Otwieramy **Widok Arkusza**. Dążymy do otrzymania efektu – ryc. 4.

Wpisujemy z klawiatury nazwy kolumn (liczba boków, miara kąta w stopniach) i wierszy (pierwszy wie-

lokąt itd., SUMA KĄTÓW). W polach B3, B4, B5 wpisujemy kolejno *n*, *i*, *j*, w polu C3 wpisujemy 180360/*n* i analogicznie w C4 i C5. Chcemy, aby w polach B6, B7, B8, C6, C7, C8 pokazywały się zera, jeśli te wielokąty będą niewidoczne. W tym celu u dołu ekranu w polu **Wprowadź** wpisujemy:

$B6 = \text{Jeżeli}(k \neq 2, 0, k)$ i analogicznie dla B7 i B8,
 $C6 = \text{Jeżeli}(k \neq 2, 0, 180360/k)$ i analogicznie dla C7 i C8.

Jest to tzw. formatowanie warunkowe, np. w polu B6: jeśli *k* będzie równe 2, to wyświetli się 0, w przeciwnym przypadku wyświetli się wartość *k*.

W polu C9 za pomocą narzędzia **Dodaj wartości w zbiorze komórek** sumujemy wartości z pól od C3 do C5. W polach A2 i A9 wpisujemy = i zatwierdzamy Enterem. Ustalamy kolorystykę i obramowanie tabeli i za pomocą **Utwórz Tabela** tworzymy tabelkę w **Widoku Grafiki**.

Możemy na tym zakończyć formatowanie apletu i pozostawić uczniom komentarz albo też dodać odpowiedni tekst, który będzie się wyświetlał w zależności od sytuacji. Za pomocą **Wstaw tekst** wpisujemy trzy teksty – tekst1: za mało o 360 – C9° (przy czym C9 wybieramy jako obiekt w polu tekstowym), tekst2: za dużo o C9 – 360°, tekst3: wierzchołek został wypełniony. Ponownie korzystamy z formatowania warunkowego. W polu **Wprowadź** wpisujemy:

$\text{Jeżeli}(C9 > 360, \text{tekst2}, \text{Jeżeli}(C9 < 360, \text{tekst1}, \text{tekst3}))$

	liczba boków	miara kąta w stopniach
1. wielokąt	5	108
2. wielokąt	7	128.57
3. wielokąt	3	60
4. wielokąt	3	60
5. wielokąt	0	0
6. wielokąt	0	0
Suma kątów		356.57

▲ Ryc. 4

W ten sposób program zinterpretuje, czy za pomocą danych wielokątów można wypełnić powierzchnię wokół wierzchołka.

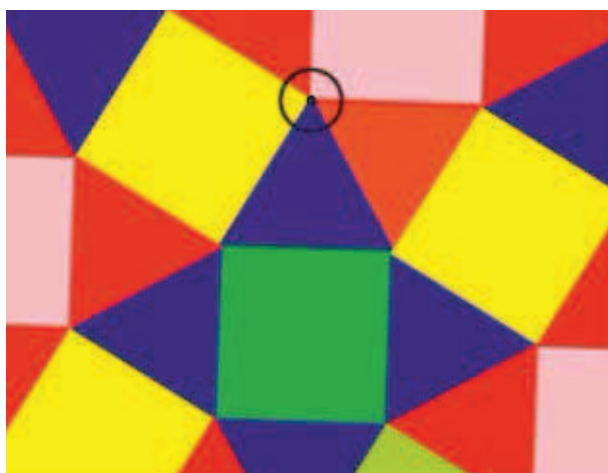
Omawiając wypełnienie płaszczyzny wokół sześciokąta foremnego, zauważyliśmy, że istnieją układy, które pozwalają na wypełnienie powierzchni tak, aby wszystkie wierzchołki były tego samego typu i takie, które nie dają takiej możliwości. Jest to punkt wyjścia do dokonania klasyfikacji parkietaży.

Parkietaże składające się wyłącznie z przystających wielokątów foremnych nazywamy foremnymi (platońskimi).

ILE JEST PARKIETAŻY FOREMNYCH?

Z matematycznego punktu widzenia suma kątów wielokątów foremnych skoncentrowanych wokół jednego wierzchołka wynosi 360° . A zatem miara kąta wielokąta foremnego, z którego zbudowany jest parkietaż, jest dzielnikiem 360° . Mamy tylko trzy wielokąty foremne spełniające ten warunek: trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny – mamy zatem trzy parkietaże foremne.

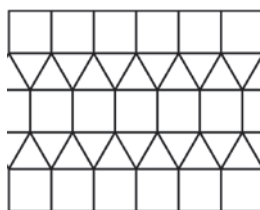
Jeżeli parkietaż składa się z wielokątów foremnych i w każdym wierzchołku parkietażu znajduje się dokładnie ten sam układ wielokątów (z dokładnością do obrotu), to parkietaż nazywamy półforemnym regularnym lub archimedesowym. Typem parkietażu półforemnego regularnego nazywamy typ jego wierzchołków (ryc. 5).



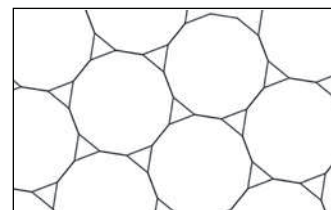
▲ Ryc. 5. Parkietaż typu (3, 3, 4, 3, 4)

Ćwiczenie 4

Podaj typ parkietaży półforemnych regularnych na podanych poniżej rycinach:



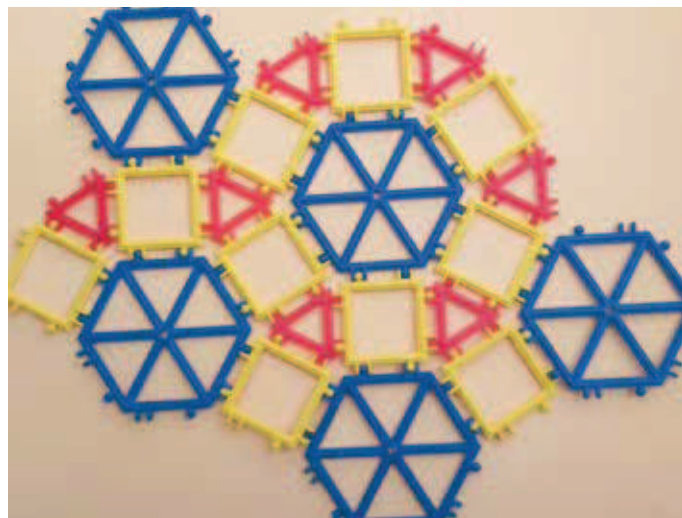
▲ Ryc. 6



▲ Ryc. 7

Da się w matematyczny sposób określić liczbę parkietaży półforemnych regularnych, jednak nie jest to dowód elementarny – tak więc po prostu omówimy wszystkie typy takich parkietaży. Zanim jednak to zrobimy, poprośmy uczniów, aby za pomocą klocków lub innych modeli wielokątów foremnych spróbowali zbudować parkietaż półforemny regularny.

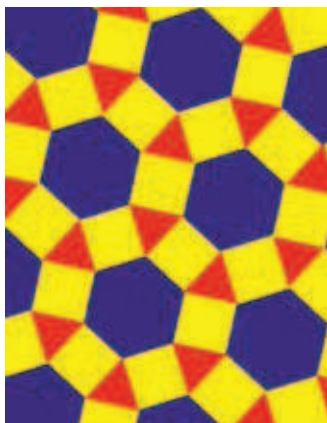
Może powstać na przykład taki fragment parkietażu półforemnego regularnego (ryc. 7):



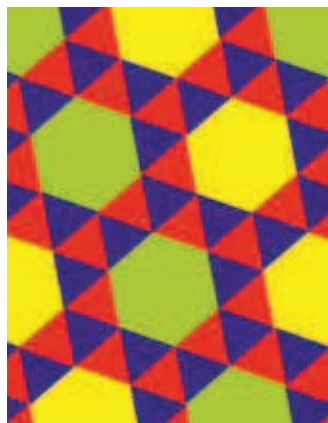
▲ Ryc. 7

Mamy pięć różnych typów parkietaży półforemnych regularnych, w którego wierzchołku znajdują się jedynie sześciokąty foremne, trójkąty równoboczne lub kwadraty (wskazuję je w tym miejscu, gdyż zwykle takie wielokąty foremne znajdziemy w gotowych zestawach). Uczniowie dysponujący klockami powinni dojść do powyższego wniosku metodą prób i błędów.

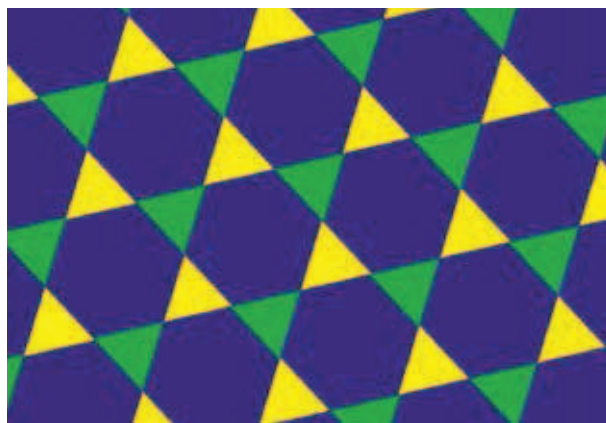
Są to parkietaże półforemne regularne jak na ryc. 8–10 oraz parkietaże półforemne regularne, składające się z kwadratów i trójkątów równobocznych (ryc. 11, 12).



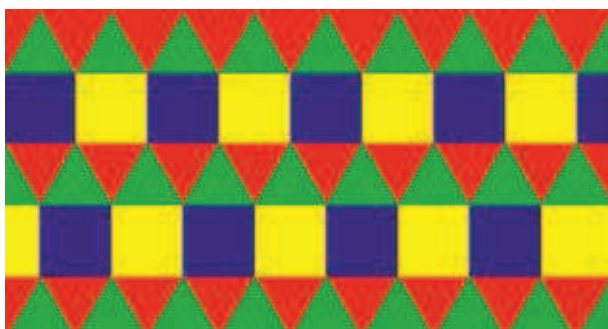
▲ Ryc. 8. Parkietaż typu (3, 4, 6, 4)



▲ Ryc. 9. Parkietaż typu (3, 3, 3, 3, 6)



▲ Ryc. 10. Parkietaż typu (3, 6, 3, 6)



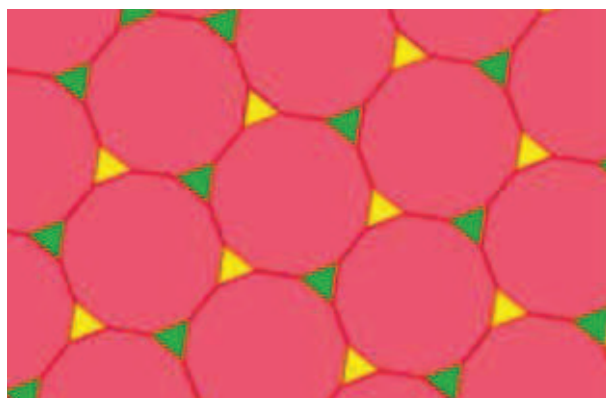
▲ Ryc. 11. Parkietaż typu (3, 3, 3, 4, 4)



▲ Ryc. 12. Parkietaż typu (3, 3, 4, 3, 4)



▲ Ryc. 13. Parkietaż typu (4, 8, 8)



▲ Ryc. 14. Parkietaż typu (3, 12, 12)

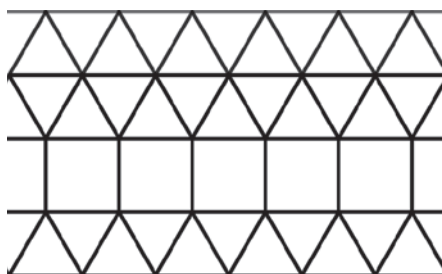
Oprócz powyższych istnieją jeszcze trzy typy parkietaży półforemnych regularnych, skupiających wokół wierzchołka trzy wielokąty (ryc. 13, 14).

Parkietaż, który składa się z wielokątów foremnych, ale ułożenie figur lub same figury w wierzchołkach są różne, nazywamy półforemnym nieregularnym (ryc. 17).

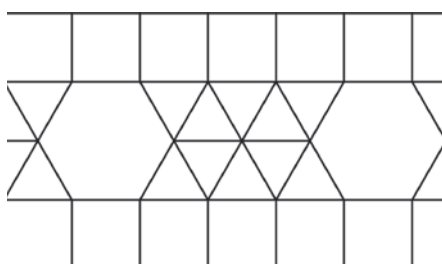
PARKIETAŻ PÓŁFOREMNY NIEREGULARNY

Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że przedstawione parkietaże są parkietażami półforemnymi nieregularnymi (ryc. 15, 16).



◀ Ryc. 15



◀ Ryc. 16

Wiemy już, jak sprawdzić, czy w wierzchołku mogą występować dane wielokąty foremne, a także potrafimy sklasyfikować parkietaże zbudowane z wielokątów foremnych. Posuńmy się w naszych rozważaniach dalej. Zastanówmy się, czy jeśli dane wielokąty foremne wypełnią nam przestrzeń wokół wierzchołka, to uzupełniając taki układ o kolejne wielokąty, zawsze otrzymamy parkietaż foremny lub półforemny.

Weźmy wierzchołek, w którym skupiają się trójkąt równoboczny, dziesięciokąt foremny i piętnastokąt foremny. Taki wierzchołek istnieje, bo $60^\circ + 144^\circ + 156^\circ = 360^\circ$ (ryc. 18).

Na grafice wierzchołek ten został oznaczony przez B. Spróbujmy uzupełnić wierzchołek A o wielokąt foremny. Do wypełnienia pozostaje nam kąt 144° . Jeżeli przeanalizujemy tabelę wartości kątów w wielokątach foremnych, zauważymy, że żadna kombinacja wielokątów foremnych – poza dziesięciokątem foremnym – nie wypełni szczerlnie wierzchołka A. Wstawmy więc dziesięciokąt foremny.

Wypełniliśmy A, ale do wypełnienia pozostał jeszcze wierzchołek P. Widzimy, że kąt, który pozostał, ma bardzo małą miarę (dokładniej $360^\circ - 144^\circ - 144^\circ - 60^\circ = 12^\circ$) i nie zdołamy wypełnić go za pomocą wielokąta foremnego.

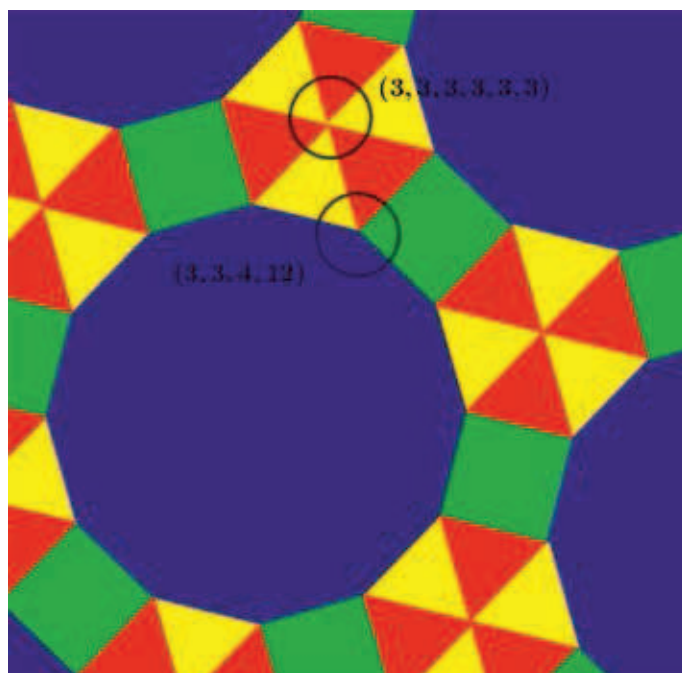
Jest to przykład na to, że wypełnienie jednego wierzchołka parkietażu przez wielokąty foremne nie daje nam gwarancji, że będzie to parkietaż foremny lub półforemny.

Ćwiczenie 6

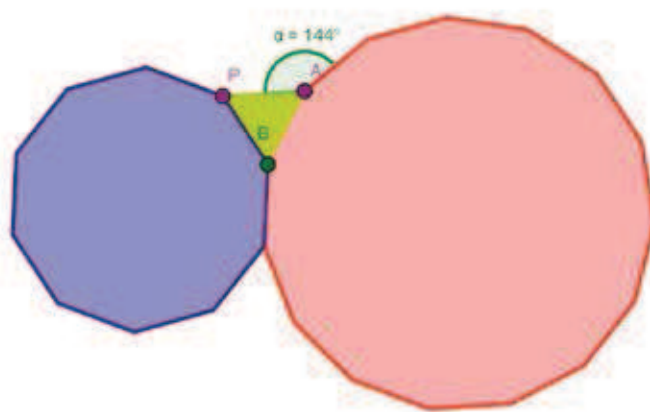
Wykaż, że istnieją wierzchołki podanych typów wypełnione wielokątami foremnymi, ale parkietaż z nich utworzony nie będzie półforemny.

- (5, 5, 10)
- (3, 9, 18)
- (3, 7, 42)

Dokonaliśmy klasyfikacji parkietaży składających się z wielokątów foremnych i omówiliśmy podstawowe własności kątów w wielokątach foremnych. Jako pracę



▲ Ryc. 17. Parkietaż półforemny nieregularny



▲ Ryc. 18

domową możemy zadać uczniom wykonanie zdjęcia parkietażu w życiu codziennym (niekoniecznie foremnego lub półforemnego). W moim przypadku powstała całkiem ładna galeria, która ozdobiła później korytarz podczas szkolnego święta matematyki. W ten sposób pokazujemy uczniom, że matematyka może być interesująca i ładna.

dr Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Adiunkt dydaktyczny na Uniwersytecie Przyrodniczo-Humanistycznym w Siedlcach. Nauczycielka matematyki w Zespole Szkół nr 1 w Mińsku Mazowieckim. Rzeczoznawca podręczników do kształcenia ogólnego w zakresie matematyki.